ÜBER ABWEICHUNGEN

VOM

POISEUILLE'SCHEN GESETZ.

INAUGURAL-DISSERTATION

EINER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT (II. SECTION)

DER

KGL. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT ZU MÜNCHEN

AM 26. JANUAR 1899

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VORGELEGT

VON

GEORG WETZSTEIN

AUS APPETSHOFEN.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

LEIPZIG,

JOHANN AMBROSIUS BARTH.

1899.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Einleitung.

§ 1. Gelegentlich einer Arbeit über innere Reibung von Lösungen, bei welcher die Methode der Strömung durch Capillaren verwendet wurde, zeigte es sich, dass bei Anwendung verschiedener Drucke für den nach der Formel von Poiseuille unter Berücksichtigung des Hagenbach'schen Correctionsgliedes berechneten Coefficienten der inneren Reibung Zahlen erhalten wurden, die unter sich weit grössere Differenzen aufwiesen, als selbst relativ grosse Beobachtungsfehler ausmachen konnten. Es war daher naheliegend, jene Arbeit vorläufig zu unterbrechen und die Aenderungen der so berechneten Coefficienten mit dem Drucke zum Gegenstande einer eingehenderen Untersuchung zu machen, zumal eine tiefere Erkenntniss des Vorganges bei dem Strömen einer Flüssigkeit durch eine Capillare von grösserem Interesse für den Physiker zu sein scheint, als eine Bereicherung des ohnehin schon ziemlich umfangreichen Beobachtungsmateriales über die Abhängigkeit der inneren Reibung von Lösungen von den chemischen und physikalischen Eigenschaften ihrer Bestandtheile.

Die Untersuchung führte denn auch bei sämmtlichen verwendeten Substanzen zu dem Resultate, dass eine Abweichung von dem Poiseuille'schen Gesetze thatsächlich vorhanden ist, indem der berechnete Coefficient bei Anwendung höherer Drucke abnimmt, und zwar so, dass diese Abnahme für relativ niedrige Drucke ziemlich bedeutend ist, während er sich mit wachsendem Drucke einem Grenzwerthe nähert. Die constatirte Aenderung des Coefficienten für innere Reibung, so wie er sich aus den Beobachtungen durch Anwendung der Formel Poiseuille's ergiebt, mit dem angewendeten Drucke lässt sich durch eine überaus einfache Relation, durch die Gleichung einer gleichseitigen, auf ihre Asymptoten als Coordinatenaxen bezogenen Hyperbel, mit vollständig genügender Genauigkeit darstellen.

Da in der vorliegenden Arbeit nur Drucke angewendet wurden, die zwischen 24 cm und 180 cm Wasser schwankten, so kann wohl nicht davon die Rede sein, dass die constatirten Abweichungen eine Folge der Dichtigkeitsänderungen der betreffenden Substanz sein könnten; vielmehr muss die Aenderung des berechneten Coefficienten als eine unmittelbare Wirkung des Druckes betrachtet werden, womit jedoch keine Abhängigkeit der inneren Reibung selbst vom Drucke charakterisirt sein soll. Es werden im Gegentheil im Laufe der Untersuchung mehrfache Gründe angegeben werden, welche für eine anderweitige Erklärung sprechen.

§ 2. Die bisher allgemein herrschende Ansicht, dass das Poiseuille'sche Gesetz für die innere Reibung von Flüssigkeiten bei Anwendung verschiedener Drucke gleiche Resultate für den Reibungscoefficienten liefert, hat mich veranlasst, in dem *ersten Theil* der vorliegenden Arbeit die nach dieser Richtung hin wichtigen Abhandlungen, je nach ihrer Bedeutung, einer mehr oder weniger eingehenden Besprechung zu unterziehen.

Der *zweite Abschnitt* soll meine Versuchsanordnung und den Apparat beschreiben; im *dritten* folgen dann die angestellten Versuche, welche im *vierten* durch Aufstellung einer Formel zu einem einheitlichen Ganzen vereinigt werden sollen. Dem *fünften Abschnitt*, der eine Erklärung der beobachteten Erscheinung zu geben versucht, folgt eine Zusammenstellung der gewonnenen Resultate.

I. Abschnitt.

§ 3. Wenn Hagenbach[1]) schreibt, dass man sich nicht genug darüber wundern kann, dass sich die Physiker solange mit der von Newton gegebenen Definition einer Flüssigkeit: „Fluidum est corpus omne, cuius partes cedunt vi cuique illatae et cedendo facile moventur inter se" begnügt haben, und dass es sich nur daraus erklärt, dass die klassischen mathematischen Untersuchungen eines Dan. Bernoulli, d'Alembert und Euler in der Hydrodynamik Resultate liefern mussten, die mit der Erfahrung oft nur wenig übereinstimmten, so ist

1) E. Hagenbach, Pogg. Ann. **109.** p. 386. 1860.

dagegen einzuwenden, dass bereits Newton die Reibung von Flüssigkeiten berücksichtigt hat. Wenn er auch das eigentliche Wesen der Viscosität noch nicht zu erkennen vermochte, so hat er doch[1]) für den Widerstand, welchen die Luft einer pendelnden Kugel bei kleinen Amplituden entgegensetzt, eine aus drei Ausdrücken additiv zusammengesetzte Formel aufgestellt, deren erster dem Quadrat, deren zweiter der $^3/_2$ten Potenz und deren dritter der einfachen Geschwindigkeit proportional ist. In einem anderen Theile seines Werkes reducirte er, indem er den Widerstand berechnet, den eine Kugel erfährt, wenn sie in Luft oder in Wasser langsam fällt, die Formel auf die Summe zweier Terme, deren einer dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, während der andere constant ist.

Derselben Formel in ihrer specialisirten Gestalt bediente sich Dan. Bernoulli in seiner Hydrodynamica, als er die von Newton angestellten Pendelbeobachtungen der Rechnung unterzog. Er fügte hinzu, dass wohl die Schwierigkeit der Pendelbeobachtungen überhaupt die Ursache sein dürfte, dass Theorie und Beobachtung nicht übereinstimmen.

Diesen Arbeiten über die äussere Reibung von Flüssigkeiten reiht sich die Untersuchung von Sgravesande[2]) an, in der er fand, dass der Druck einer bewegten Flüssigkeit gegen einen ruhenden Körper zum Theil proportional der einfachen Geschwindigkeit, zum Theil proportional dem Quadrat derselben ist; wenn aber die Flüssigkeit ruht und der Körper bewegt wird, wie dies beim Pendel der Fall ist, so ergiebt sich der Widerstand theils proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit, theils einer Constanten, in Uebereinstimmung mit Newton und Bernoulli.

§ 4. Ausgedehnte Untersuchungen über die Reibung von Flüssigkeiten stellte Coulomb an und beschreibt dieselben in der Abhandlung: „Expériences destinées à déterminer la cohérence des fluides et les lois de leur résistance dans les mouvements très lents“[3]); dabei bediente er sich bekanntlich der von ihm eingeführten Methode der schwingenden Scheiben.

1) Newton, Phil. nat. princ. math. lib. II sect. IX.
2) Sgravesande, Eléments de physique, § 1911.
3) Coulomb, Mém. de l'Institut III.

Er zeigt, dass, wenn Reibung eines bewegten Körpers mit einer Flüssigkeit stattfindet, der von der Flüssigkeit ausgeübte Druck durch zwei Terme dargestellt werden kann, deren einer proportional der Geschwindigkeit, deren anderer proportional dem Quadrat derselben ist; an einer späteren Stelle betont er, dass derjenige Theil des Widerstandes, der proportional der Geschwindigkeit ist, von der Adhäsion der Flüssigkeitsmolecüle untereinander und nicht von der Adhäsion derselben an der Oberfläche des schwingenden Körpers herrührt.

Coulomb war wohl der erste, von dem gesagt wird, dass er die Behauptung aufgestellt habe, dass die innere Reibung unabhängig sei vom Druck[1]); um dies zu beweisen, liess er erst einen Körper in zwei verschiedenen Tiefen Schwingungen ausführen, die eine 2 cm, die andere 50 cm unter der Oberfläche. Da, wie er selbst sagt, auf der Oberfläche des Wassers der ganze Atmosphärendruck lastet, so war es von vorn herein unwahrscheinlich, dass eine Vermehrung dieses Druckes um den einer 50 cm hohen Wassersäule eine merkliche Aenderung des Widerstandes bei den Schwingungen hervorrief. Da er auch nicht die geringste Aenderung in den Schwingungsabnahmen finden konnte, stellte er seinen ganzen Apparat, um eine grössere Verschiedenheit des Druckes zu erreichen, unter den Recipienten einer Luftpumpe, evacuirte und liess dann den Körper seine Schwingungen ausführen. Das Resultat seiner ausserordentlich sorgfältigen Beobachtung war, dass die Abnahme der Schwingungen, wie er sagt, ganz dieselbe war, ob der Raum, in welchem der Versuch gemacht wurde, luftverdünnt war oder nicht.

Aus diesem Versuche schliesst er, dass, wenn ein Körper in eine Flüssigkeit eintaucht und Schwingungen macht, der Druck oder die Höhe des darüber befindlichen Wassers den Widerstand nicht merklich vermehrt (augmente). Was Coulomb durch diesen Versuch nachgewiesen hat, ist, wie man leicht einsieht, durchaus nicht die Unabhängigkeit der inneren Reibung vom *Druck*, sondern vielmehr die Unabhängigkeit, oder

---

1) E. Hagenbach, Pogg. Ann. **109.** p. 392. 1860. — Winkelmann, Handbuch **1.** p. 575.

besser gesagt die innerhalb der Beobachtungsfehler liegende und deshalb weder als existirend, noch als nicht existirend erwiesene Aenderung des aus den Versuchen berechneten Coefficienten mit der *Dichte*, die allerdings ihrerseits durch den auf der Flüssigkeit lastenden Druck bedingt ist.

Dass Coulomb selbst die Vorstellung hat, dass der beobachtete Widerstand mit wachsendem Drucke wohl eher zu- als abnimmt (was der Gebrauch des Verbums „augmenter" beweist), scheint darauf hinzudeuten, dass auch er eine Aenderung des Widerstandes weniger mit dem Druck als mit der Dichte aus seinem Versuche erwartet hatte, denn nur bei der letzteren kann man vermuthen, dass der Widerstand mit der Dichte wächst.

§ 5. Der Hauptstützpunkt für die Annahme, dass der berechnete Coefficient für die innere Reibung constant bleibe bei Anwendung verschiedener Drucke, oder mit anderen Worten, dass das Poiseuille'sche Gesetz (einschliesslich der Hagenbach'schen Correctur) vollständig richtig sei, wofern nur die benutzte Capillare lang genug ist im Verhältniss zu der Grösse ihres Querschnittes, sind die von Poiseuille angestellten, äusserst zahlreichen Versuche, die er in seiner Abhandlung „Recherches expérimentelles sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres"[1]) veröffentlicht hat. In seinen umfangreichen Untersuchungen beobachtet er die Zeiten, die bei der gegebenen Capillare nöthig sind, damit ein sorgfältig bestimmtes Flüssigkeitsvolumen unter dem gegebenen Druck die Capillare passirt.

Die so aus der Beobachtung erhaltenen Werthe vergleicht er mit den aus seiner Formel

$$\eta = \frac{P \cdot r^4 \cdot t}{8 \pi l v}$$

berechneten.

Für Capillaren, deren Länge im Verhältniss zu ihrem Durchmesser zu gering ist, zeigt er, dass das Gesetz von gewissen Drucken an nicht mehr gilt, indem die beobachteten Zeiten bei solchen Röhren für wachsende Drucke weniger rasch abnehmen, als es aus dem Gesetz folgen würde. Dass

1) Poiseuille, Mém. des Savants Étrangers. Tome IX. p. 433. 1846.

aber bei den Versuchen, aus denen er auf die Richtigkeit seiner Formel schliesst, bei denen also die Länge der Capillaren im Verhältniss zum Durchmesser genügend gross ist, die Zeiten mit wachsendem Druck stärker abnehmen oder, was dasselbe ist, die aus seiner Formel berechneten Coefficienten der inneren Reibung kleiner werden, scheint ihm vollständig entgangen zu sein. Er schreibt l. c. p. 464 trotz der wiederholt in demselben Sinne auftretenden Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Zeiten: „Les différences de quelques secondes, tantôt en plus, tantôt en moins, entre les temps calculés et ceux obtenus par l'expérience, sur des nombres aussi considérables, ne nous empêchent pas de regarder les pressions en raison inverse des temps. Nous attribuons ces petites différences, que, du reste, nous retrouverons souvent, aux petites variations de température qu'offre l'eau du récipient . . .“

Dass aber bei Poiseuille, dessen Beobachtungsfehler mitunter ziemlich bedeutend sind, sich dennoch eine Abnahme des berechneten Coefficienten bei genügend langen Röhren ergiebt, mögen die nachfolgenden Tabellen beweisen, welche unter P die angewendeten Drucke, unter t die beobachteten und unter t' die von Poiseuille aus einer der Beobachtungen berechneten Zeiten enthalten. Um auch die Grössenordnung der Abweichungen einigermaassen hervortreten zu lassen, habe ich aus den Angaben Poiseuille's die Coefficienten der inneren Reibung im C-G-S-System berechnet und dieselben unter η' in die Tabellen eingetragen; unter η finden sich die unter Berücksichtigung des Hagenbach'schen Gliedes corrigirten Werthe.

Für eine Capillare (l. c. p. 485), deren Dimensionen folgende sind:

Länge: $l = 200\,\text{mm}$

Durchmesser an den Enden: $2r = \left\{\begin{matrix}0{,}6140\\0{,}6900\end{matrix}\right\}\,\text{mm}$

Volumen: $v = 17{,}556\,\text{ccm}$

(Flüssigkeit: Wasser bei 10° C)

ergiebt sich:

	P (cm H_2O)	t	t'	η'	η
1.	8,336	1295	1295	0,013200	0,013197
2.	12,760	838	846	0,013151	0,013147
3.	16,371	657	659,4	0,013072	0,013067
4.	32,882	326	328,3	0,013105	0,013094
5.	66,129	162	163,2	0,013097	0,013075
6.	132,187	81,5	81,7	0,013487	0,013444
7.	198,176	56,0	54,5	0,013263	0,013201

Die Abnahme der inneren Reibung mit dem Druck geht deutlich hervor aus den Beobachtungen 1 bis 5; wenn die Versuche 6 und 7 auch nicht dasselbe beweisen, so liegt darin durchaus kein Widerspruch gegen die ausgesprochene Aenderung, indem für so hohe Drucke die Capillare, wie Poiseuille selbst zugiebt, eben doch zu kurz war; dazu kommt noch der Umstand, dass die Beobachtungsfehler bei so kurzer Versuchsdauer sehr grosse sind.

Die Werthe von t' sind aus dem ersten Versuche berechnet.

Eine andere Versuchsreihe Poiseuille's mit einer Capillare, deren Dimensionen

$$l = 15 \text{ mm}$$

$$2r = \left\{\begin{matrix}0{,}1405\\0{,}1430\end{matrix}\right\} \text{ mm}$$

waren, und bei der

$$v = 17{,}556 \text{ ccm (Wasser bei } 10^0 \text{ C)}$$

liefert

	P (mm Hg)	t	t'	η'	η
1.	24,661	8646	8646	0,013200	0,013159
2.	49,591	4355	4299	0,013370	0,013298
3.	98,233	2194	2170	0,013342	0,013182
4.	148,233	1455	1458	0,013352	0,013112
5.	194,257	1116	1097	0,013422	0,013103
6.	388,00	571	549	0,013714	0,013093
7.	775,16	298	275	0,014300	0,013100

Schliesst man die erste Beobachtung, bei welcher infolge des geringen Druckes die Beobachtungsfehler einen ziemlich bedeutenden Einfluss auf das Resultat haben, von der Betrachtung aus, so lässt sich doch auf Grund der übrigen Versuche mit grosser Sicherheit constatiren, dass die Beobachtungen Poiseuille's meinen Beobachtungsresultaten (§ 1) nicht widersprechen, und dass sich auch aus seinen Versuchen, wofern man nur das Hagenbach'sche Correctionsglied berücksichtigt, eine Abnahme der inneren Reibung mit wachsendem Druck nachweisen lässt.

In ganz ähnlicher Weise zeigt die folgende Tabelle das Auftreten derselben Erscheinung bei einer Versuchsreihe, bei der die Dimensionen der Capillare

$$l = 383 \text{ mm}$$

$$2r = \left\{\begin{matrix}0{,}6160\\0{,}6932\end{matrix}\right\} \text{ mm}$$

und das Volumen

$$v = 17{,}556 \text{ ccm}$$

waren.

	P (cm H_2O)	t	t'	η'	η
1.	12,692	1623	1623	0,013200	0,013198
2.	30,308	678	679,7	0,013167	0,013141
3.	66,742	306	308,6	0,013087	0,013027
4.	135,210	150	152,3	0,012996	0,012876
5.	198,150	104	103,9	0,013205	0,013030
6.	262,034	78	78,6	0,013097	0,012864
7.	519,860	40,2	39,6	0,013392	0,012839
8.	1046,28	20	19,7	0,013409	0,012503

Bei dem 5. Versuche ist jedenfalls ein nicht unbedeutender Beobachtungsfehler gemacht worden; was den 8. Versuch betrifft, so fällt dieser gar nicht ins Gewicht, indem man unmöglich von einer so kurzen Versuchsdauer noch ein Resultat verlangen kann, das denen der anderen Beobachtungen gleichwerthig wäre.

Dass die Werthe für den Coefficienten der inneren Reibung, so wie sie sich aus den Beobachtungen mittels der Poiseuille'schen Formel ergeben, sich mit wachsendem Druck einer

Constanten nähern, zeigen auch die Versuche Poiseuille's mit hinreichender Genauigkeit, sobald man aus seinen Beobachtungen solche herausgreift, bei denen relativ hohe Drucke zur Anwendung kamen.

Für das arbeitende Flüssigkeitsvolumen $v = 13{,}340$ ccm und eine Capillare, deren Enddurchmesser $2r = \left\{\begin{matrix}0{,}1400\\0{,}1420\end{matrix}\right\}$ mm waren, während ihre Länge 75,8 mm betrug, lassen sich die von Poiseuille erhaltenen Resultate in der nachfolgenden Tabelle übersichtlich darstellen und liefern, indem die aus der Formel sich ergebenden Werthe von t' hier nicht berechnet wurden:

	P (mm Hg)	t	η'	η
1.	97,764	10361,0	0,013332	0,013325
2.	147,832	6851,0	0,013330	0,013318
3.	193,632	5233,0	0,013336	0,013323
4.	387,675	2612,5	0,013330	0,013303
5.	738,715	1372,5	0,013344	0,013297
6.	774,676	1308,0	0,013336	0,013282

Bei hohen Drucken noch eine Abweichung von seinem Gesetz zu erkennen, wäre für Poiseuille wohl unmöglich gewesen, indem, wie aus der letzten Tabelle hervorgeht, erst die Correction der Formel durch das viel später aufgestellte Hagenbach'sche Correctionsglied eine Abweichung vom Poiseuille'schen Gesetz erkennen lässt.

Dass Poiseuille diese bei ihm durch die vorhergehenden Tabellen deutlich nachgewiesenen Abweichungen von seinem Gesetz, die stets in einem bestimmten Sinne erfolgen, seinen Beobachtungsfehlern zugeschrieben hat, liegt wohl daran, dass er die Reibungscoefficienten nicht explicit als solche dargestellt und berechnet hat; dass aber die Ueberzeugung von der allgemeinen Gültigkeit des Poiseuille'schen Gesetzes bis auf den heutigen Tag die Physiker beherrscht, mag darin seine Ursache haben, dass fast alle späteren Forscher die Drucke nicht variirten.

§ 6. Der Strömung von Flüssigkeiten in weiten Röhren und Canälen ist die Abhandlung Darcy's: „Recherches ex-

périmentales rélatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux“ [1]) gewidmet; er beschreibt hier seine ausserordentlich zahlreichen Versuche, die er aus rein praktischem Interesse in seiner Stellung als „inspecteur général des ponts et chaussées“ angestellt hat.

Die lichte Weite der von ihm benutzten Röhren schwankt zwischen 0,012 m und 0,50 m, die Länge derselben zwischen 1,12 m und 11,75 m; das Material, aus dem die Röhren gefertigt worden sind, war verschieden: Schmiedeeisen, Blei, Blech, Glas und Gusseisen.

Während nach der von Newton stammenden und später durch Navier, Poisson, Sonnet und Dupuit wieder aufgenommenen Hypothese die Bewegung des Wassers in Röhren durch die Gleichung

$$-E.\frac{dv}{dr}=\frac{r.i}{2}$$

dargestellt wurde, wobei v die Geschwindigkeit der Flüssigkeit an einer Stelle der Röhre, r den Abstand dieser Stelle von der Röhrenaxe, i den Druck, unter welchem die Strömung vor sich geht, und E einen constanten Factor bedeutet, hat Darcy gezeigt, dass aus seinen Versuchen (für weite Röhren) die Formel

$$E\left(R.\frac{dv}{dr}\right)^2=\frac{r.i}{2}$$

resultirt, wobei R der Radius der verwendeten Röhre ist.

Wie Darcy selbst mittheilt, findet man schon in dem Werke: „Nouvelles formules rélatives aux eaux courantes“ von St. Vénant, dass man unter der Newton'schen Annahme

$$-E.\frac{dv}{dr}=\frac{r.i}{2}$$

den Proportionalitätsfactor mit den Dimensionen des Querschnittes wachsen lassen müsse. Bis zu einem gewissen Grade lässt sich dies, wie Darcy schreibt, auch einsehen, wenn man bedenkt, dass die Flüssigkeitsfäden sich nicht parallel unter sich mit gleichmässig abnehmender Geschwindigkeit bewegen, sondern dass Wirbel- und andere krummlinige Bewegungen die Intensität der Reibung beeinflussen und sich hauptsächlich bei grossen Querschnitten geltend machen.

1) Darcy, Mém. prés. par div. savants. Tome XV. 1858.

An einer späteren Stelle bringt Darcy für die mittlere Geschwindigkeit u, mit welcher die Flüssigkeit die Röhre durchströmt, den Ausdruck

$$\left(\alpha + \frac{\beta}{R}\right) u^2 + \left(\alpha' + \frac{\beta'}{R}\right) u = R \frac{H}{L},$$

in welchem H den Druck, L die Länge der Capillaren und R den Radius derselben darstellt.

Für sehr kleine Geschwindigkeiten wird, wenn man statt dieser die Ausflussmengen φ einführt:

$$\varphi\left(\alpha' + \frac{\beta'}{R}\right) = \pi . R^3 . \frac{H}{L}$$

und, wenn R sehr klein ist,

$$\varphi = K . R^4 \frac{H}{L},$$

eine Formel, die mit der von Poiseuille experimentell aufgestellten für Capillarröhren vollständig übereinstimmt, was beweist, dass die Poiseuille'sche als specieller Fall in der Darcy'schen Formel enthalten ist.

Das eigentliche Verdienst Darcy's besteht darin, dass er auf Grund zahlreicher Versuche nachgewiesen hat, dass in weiten Röhren Wirbelbewegungen auftreten und dass die Randschicht bei weiten Röhren nicht festhaftet, sondern eine gewisse endliche Geschwindigkeit besitzt, für welche er den Werth:

$$w = \sqrt{\frac{R . i}{2 b_0}}$$

angiebt, wobei R wieder der Radius, i der Druck und b_0 eine Constante ist.

§ 7. Hagenbach[1]) leitet unter der Voraussetzung, dass die innere Reibung 1. unabhängig sei vom Druck, 2. proportional der Oberfläche, 3. proportional der relativen Geschwindigkeit der sich reibenden Flüssigkeitsschichten, und dass 4. die Geschwindigkeit am Rande der Röhre gleich Null sei für den Fall der Strömung einer Flüssigkeit in Capillaren, also in parallelen Fäden, das Poiseuille'sche Gesetz ab.

1) E. Hagenbach, Pogg. Ann. **109.** p. 392. 1860.

Für den Fall, dass nicht die gesammte lebendige Kraft dazu verwendet wird, die innere Reibung zu überwinden, sondern die Flüssigkeit mit einer endlichen Geschwindigkeit die Capillare verlässt, berechnet er das nach ihm benannte, auch in der vorliegenden Arbeit bei allen Beobachtungen berücksichtigte Correctionsglied:

$$\delta = - \frac{v \cdot \varrho}{8 \pi l \cdot t},$$

wobei v das die Capillare passirende Flüssigkeitsvolumen, ϱ die Dichte der benutzten Substanz, l die Länge der Capillaren und t die zum Passiren derselben nothwendige Zeit darstellt.

Bei Anwendung sehr verschiedener Drucke schwankt diese Correctur naturgemäss innerhalb sehr weiter Grenzen und muss nothwendig berücksichtigt werden; sie erweitert so zu sagen die Grenzen, innerhalb deren das Poiseuille'sche Gesetz Gültigkeit hat, ganz beträchtlich. Hagenbach war es, der zuerst den Versuch machte, die Zähigkeit einer Flüssigkeit auf den numerischen Werth einer Kraft zurückzuführen, indem er die innere Reibung einer Flüssigkeit als diejenige Kraft definirt, welche nöthig ist, um zwei Flüssigkeitsschichten mit einer bestimmten constanten Geschwindigkeit übereinander zu verschieben.

§ 8. Was die neueren Arbeiten über dieses Gebiet betrifft, so ist in erster Linie die Abhandlung der Herren Warburg und von Babo[1]): „Ueber den Zusammenhang zwischen Viscosität und Dichte bei flüssigen, insbesondere gasförmig-flüssigen Körpern“ anzuführen. Die genannte Abhandlung hat, wie die fast gleichzeitig publicirte Arbeit von Hrn. Röntgen[2]), die mehr orientirender Natur ist, das Ergebniss gehabt, dass die Abweichung des Coefficienten für Viscosität oder innere Reibung vom Poiseuille'schen Gesetz viel weniger mit dem Druck als mit der Dichte zusammenhängt oder nach den angewendeten Versuchsanordnungen zusammen zu hängen scheint. Auch die Inaugural-Dissertation von Hrn. J. Sachs[3]) „Ueber den Einfluss der Dichtigkeit auf die Viscosität tropf-

1) E. Warburg u. von Babo, Wied. Ann. **22.** p. 518. 1884.
2) W. C. Röntgen, Wied. Ann. **22.** p. 510. 1884.
3) J. Sachs, Inaug.-Diss. Freiburg i. B. 1883.

barer Flüssigkeiten“ befasst sich, wie ihr Titel sagt, mit einem wesentlich anderen Problem als die vorliegende Arbeit.

Jedenfalls kann man sagen, dass die in diesem Paragraph aufgeführten Forscher klar und deutlich erkannten, dass die von ihnen constatirten Abweichungen vom Poiseuille'schen Gesetz von den Aenderungen der Dichtigkeit der untersuchten Flüssigkeiten herrühren und nicht von der unmittelbaren Einwirkung des Druckes.

Analog verhält es sich mit der von Hrn. Cohen[1]) verfassten Abhandlung „Ueber den Einfluss des Druckes auf die Viscosität von Flüssigkeiten“. Auch hier wird, wie aus der Abhandlung selbst leicht erkannt werden kann, ganz dasselbe Ziel verfolgt wie in den oben genannten Arbeiten, nämlich nicht den directen Einfluss des Druckes, sondern vielmehr den der Dichtigkeit auf die Abweichungen von dem Poiseuille'schen Gesetze zu bestimmen.

Während bei den vorhergehenden Arbeiten Drucke bis zu 150 Atmosphären Anwendung fanden, benutzte der letztgenannte Forscher solche bis zu 700 Atm.; schon dieser Umstand muss dafür sprechen, dass die von Hrn. Cohen erhaltenen Aenderungen nicht sowohl als eine unmittelbare Folge des Druckes als vielmehr der Dichte aufzufassen sind. Dazu kommt, dass seine Versuchsanordnung mit den von den anderen Herren angewendeten im Princip vollständig übereinstimmt.

Die gesammte vorhandene Literatur weist demnach darauf hin, dass bisher Abweichungen vom Poiseuille'schen Gesetz (einschliesslich der Hagenbach'schen Correctur) als directe Folgen von Druckänderungen nicht constatirt worden sind.

Mögen die folgenden Abschnitte der vorliegenden Arbeit geeignet erscheinen, derartige Abweichungen thatsächlich nachzuweisen und zu erklären.

II. Abschnitt.

§ 9. Wenn man die in dem letzten Decennium publicirten Arbeiten über die innere Reibung von Flüssigkeiten, die sich besonders mit der Untersuchung chemischer Einflüsse auf die innere Reibung beschäftigen, einer eingehenderen Be-

1) R. Cohen, Wied. Ann. **45**. p. 666. 1892.

trachtung unterzieht und dieselben auf den Grad der erreichten Genauigkeit prüft, so kann man wohl nicht umhin anzuerkennen, dass die beiden Abhandlungen der Herren Thorpe und Rodger[1]) „On the Relations between the Viscosity of Liquids and their Chemical Nature“ in allererster Linie zu nennen sind.

Aus diesem Grunde schien es zweckmässig, ihre Versuchsanordnung, die im grossen und ganzen der von Poiseuille folgt, im allgemeinen beizubehalten.

Das Princip dieser bei Untersuchungen über die Viscosität allenthalben benutzten Methode ist folgendes: Ein zwischen zwei Marken abgegrenztes Flüssigkeitsvolumen, das während aller Versuche constant bleibt, passirt unter einem gewissen Druck eine Capillare von bekannten Dimensionen; Aufgabe des Beobachters ist es, die Zeit zu bestimmen, die dazu nöthig ist, ferner den Druck zu messen, unter dem die Strömung vor sich geht, und dafür Sorge zu tragen, dass letzterer, sowie die Temperatur während der Beobachtung möglichst constant bleiben.

§ 10. Bei der Entscheidung über die Form ihres Apparates liessen sich die oben genannten Forscher von folgenden Grundideen leiten:

Während bei den meisten Instrumenten früherer Beobachter die Flüssigkeit, nachdem sie die Capillare passirt hatte, aus dem Apparate ausfloss und so jedesmal eine neue Füllung nöthig machte, sollte in dem zu construirenden „Glischrometer“ immer ein und dasselbe Flüssigkeitsvolumen wiederholt benutzt werden können, ohne dass der Apparat jedesmal frisch gefüllt zu werden brauchte. Eine weitere Zeitersparniss sollte dadurch erreicht werden, dass man dafür sorgte, dass die Flüssigkeit, indem sie die Capillare passirte, gleich in die richtige Lage für einen zweiten Versuch gelangte; schliesslich sollte in den Theilen des Apparates, die mit der Flüssigkeit direct in Berührung kommen, die Anwendung von Kork und Kautschuk vermieden werden.

So entstand folgende Form des Apparates:

Die beiden verticalen Schenkel L und R sind in der Nähe ihrer unteren Enden durch ein Querstück verbunden, in welchem

1) T. E. Thorpe u. J. W. Rodger, Phil. Trans. p. 397. 1894.

in der Mitte bei M die horizontale Capillare eingeschmolzen ist, deren Wandung über 2 mm Dicke besitzt, während der Innenradius des Querstückes etwa 1 mm grösser ist als der äussere Radius der Capillaren.

Wenn ich auch nicht einsehen kann, inwiefern durch das Querstück die Gefahr verringert wird, dass die lichte Weite der Capillaren sich ändert[1]), so hat es doch sicher den grossen Nutzen, dass es dem ausschliesslich aus Glas hergestellten Apparate eine grössere Festigkeit verleiht und insbesondere die Capillare vor dem Zerbrechen schützt. Das Einschmelzen der Capillaren hatte natürlich so zu erfolgen, dass dadurch die beiden Schenkel vollständig voneinander getrennt wurden.

Auf jedem Schenkel des Apparates sind zwei feine horizontale Marken m_1, m_2, m_3 und m_4 eingeätzt; die Volumina zwischen denselben wurden sorgfältig bestimmt, denn sie enthalten die Flüssigkeitsmengen, deren Durchflusszeiten durch die Capillare bestimmt werden soll. In der Nähe dieser Marken sind die Schenkel enger, um bei der Beobachtung der Coincidenzen des Flüssigkeitsmeniscus mit der Marke grössere Genauigkeit zu gewähren. An die oberen Enden H der beiden Schenkel sind Erweiterungen angeschmolzen, in welche man einen Theil der Flüssigkeit überfliessen lassen kann, indem man den Druck auf den anderen Schenkel wirken lässt. Man ist dadurch im Stande, vor jedem Versuch eine gewisse Niveaudifferenz in den beiden Schenkeln herzustellen oder, mit anderen Worten, bei Beginn eines jeden Versuches dem von der Flüssigkeit im Apparat herrührenden Druck eine bestimmte messbare Grösse zu geben, die bei allen Beobachtungen mit derselben Substanz und bei derselben Temperatur gleich ist.

Bei der Einstellung hat man nur darauf zu achten, dass das Niveau im einen Schenkel gerade bei einer Marke k_1 sich befindet, wenn die Oberfläche der Flüssigkeit im anderen Schenkel eben bei H ist.[2])

Die Gestalt der beiden Schenkel ist von den Beobachtern cylindrisch gewählt worden und nicht kugelförmig, damit die darin enthaltene Flüssigkeit um so schneller die Temperatur

1) Phil. Trans. p. 409. 1894.
2) Näheres hierüber in § 16.

des Bades annehme, in welchem der Apparat sich befindet. Diese an sich ganz zweckmässige Einrichtung liess ich, da diesem kleinen Vortheil ein weit grösserer Nachtheil gegenübersteht, wieder fallen und wartete lieber solange, bis auch die Temperatur der Flüssigkeit im Apparat als dieselbe betrachtet werden konnte wie die im äusseren Bade.

§ 11. Um während eines Versuches möglichst constante Temperaturen zu haben, benutzte ich einen mit Wasser gefüllten, parallelepipedisch geformten Behälter aus Zinkblech mit vier Glaswänden, deren Inhalt ca. 36 *l* betrug. Damit sich aber in diesem Wasserbade keine localen Temperaturen ausbilden konnten, construirte ich mir ein Rührwerk, das von dem Mechaniker des Institutes nach meinen Angaben ausgeführt wurde. Dasselbe besteht aus vier Messingschaufeln, welche in dem das Bad nach oben abschliessenden Hartgummideckel in ziemlich langen Messingführungen laufen und oberhalb des Deckels hölzerne Rollen tragen, mittels deren sie von einem kleinen Elektromotor durch einen Schnurlauf in Rotation versetzt werden. Je nachdem man mehr oder weniger Widerstand vorschaltet, kann man eine geringere oder grössere Tourenzahl der Schrauben und damit ein weniger oder mehr intensives Rühren des Wassers erzielen; schon bei ganz langsamem Rühren war der Temperaturausgleich ein ziemlich rascher und sehr vollständiger.

Die gewünschte Temperatur wurde theils durch Einleiten von Wasserdampf, theils durch Eingiessen von heissem Wasser oder durch Einwerfen von kleingestossenem Eis hergestellt; zur Messung derselben dienten zwei von C. Heintz in Stützersbach gefertigte und in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt geprüfte Thermometer.

Diese sind in Zehntelgrade getheilt, wobei 1° C. einer Längenausdehnung der Scala von etwa 1 cm entspricht, sodass man selbst mit freiem Auge bei einiger Uebung Temperaturschwankungen von 0,01° C. eben noch constatiren kann. Das eine Thermometer, Nr. 11785, reicht von 0° bis 30° C., während das andere, Nr. 11786, das Temperaturintervall von 30° bis 50° umfasst.

Der Apparat wird an einem Stativ befestigt und so in das Bad eingeführt.

§ 12. Der Druck, unter welchem die Flüssigkeit die Capillare passirt, wird durch eine Wassersäule erzeugt, welche die in einem ca. 65 *l* fassenden Glasballon *B* enthaltene Luft comprimirt, die dann ihrerseits die Bewegung der Flüssigkeit im Apparat verursacht.

A ist ein Gefäss von ca. 15 *l* Inhalt, das mit *B* communicirt mittels eines Gummischlauches; damit *A* leicht gehoben und gesenkt und so die effective Druckhöhe vergrössert oder vermindert werden kann, ist dasselbe an einem in der Wand befestigten Galgen durch eine über Rollen laufende Kette aufgehängt.

Der Ballon *B*, in dem sich die comprimirte Luft befindet, ist oben mit einem dicht schliessenden Gummistopfen versehen, der doppelt durchbohrt ist. Durch die eine Bohrung geht die bis fast auf den Grund von *B* reichende Glasröhre *a*, an welche der nach *A* führende Gummischlauch angemacht ist; die andere ermöglicht durch eine zweite kürzere Glasröhre *b* die Communication der comprimirten Luft im Ballon *B* vermittelst eines Kautschukschlauches mit der bedeutend weiteren Röhre *C*, die mit Phosphorsäureanhydrid gefüllt ist, um die mit Wasserdampf gesättigte Luft in *B* vom diesem zu befreien, damit nicht, falls hygroskopische Substanzen untersucht werden, diese durch Aufnahme von Wasser während der Versuche sich ändern, und so die Güte der Beobachtungen und die Richtigkeit der daraus gezogenen Schlüsse beeinträchtigt werden könnte.

Von *C* aus führt ein Röhrensystem zu dem Dreiweghahn *F*, während an die zu dem Dreiweghahn *J* führende Röhrenverzweigung das Manometer, natürlich mit Dazwischenschaltung einer zweiten mit Phosphorsäureanhydrid gefüllten weiteren Glasröhre, angeschlossen ist. Die Dreiweghähne *F* und *J* sind durch Gummischläuche, welche durch den Hartgummideckel des Rührwerkes hindurchgehen, mit den beiden Schenkeln des Apparates verbunden.

Der Dreiweghahn *F* hat die Aufgabe, die Verbindung des Luftreservoirs *B* mit dem linken Schenkel des Apparates herzustellen, wenn die Flüssigkeit in den Capillaren von links nach rechts fliessen soll; in diesem Falle muss *J* den rechten Schenkel in Verbindung mit der Atmosphäre setzen, sodass

auf den linken Theil des Apparates der Druck der Wassersäule *h* vermehrt um den Atmosphärendruck auf *A*, rechts dagegen nur der Druck der Atmosphäre wirkt.

Soll ein Fliessen der betreffenden Substanz von rechts nach links stattfinden, so braucht man nur bei *J* durch eine Drehung des Hahnes um 90° den Druckapparat mit dem rechten Glischrometerschenkel zum Communiciren zu bringen, während man den linken Theil des Apparates durch Drehung des Hahnes *F* mit der Atmosphäre verbindet; für den Fall, dass gar keine Strömung stattfinden soll, sei es dass der Apparat behufs Reinigung oder Neufüllung herausgenommen werden muss, oder dass die Versuche aus irgend einem anderen Grunde für einige Zeit sistirt werden, so unterbricht man die Verbindung des Luftreservoires mit *C* durch Drehen des Hahnes *W*, und damit die Communication des Druckapparates mit dem Glischrometer.

Das zum Trocknen der Luft dienende Phosphorpentoxyd in den Röhren *C* und *K* wird nach Bedarf erneuert.

§ 13. Zur Bestimmung der für die einzelnen Versuche nöthigen Zeit benutzte ich einen sehr gut regulirten Anker-Präcisionschronographen, der über dem Minutenzeiger einen „springenden" Secundenzeiger trägt, den man nach Belieben in das Gangwerk der Uhr ein- oder ausschalten kann. Da der äusserste Theilkreis des Zifferblattes eine Eintheilung in 300 Theile besitzt, so beträgt der Beobachtungsfehler bei der Bestimmung der Zeit unter Voraussetzung einiger Uebung ca. 0,2 Secunden.

§ 14. Der durch die Wassersäule ausgeübte Druck wird, wie oben erwähnt, an dem Manometer *M* gemessen; die Ablesungen können auf der in Millimeter getheilten Scala, zumal unter Benutzung einer Lupe, auf Zehntel Millimeter genau erfolgen. Indess treten zu dem abgelesenen Druck noch zwei Correcturen hinzu, von denen die eine dadurch bedingt ist, dass das Wasser im Manometer die Temperatur der Umgebung hat und somit nicht die Dichtigkeit 1, sondern eine kleinere besitzt, die aus Tabellen entnommen werden kann. Die zweite, ebenfalls negative Correctur des Druckes rührt davon her, dass der Druck der Atmosphäre auf den mit ihr communicirenden Schenkel des Apparates nicht derselbe ist,

wie der auf den ebenfalls mit der äusseren Luft in Verbindung stehenden Schenkel des Manometers; die Correctur ist negativ, weil der Meniscus des Wassers in dem offenen Schenkel bei sämmtlichen angewendeten Drucken über dem Flüssigkeitsmeniscus in dem Theil des Apparates sich befand, in den die Flüssigkeit durch die Capillare hinüberströmte, sodass der Atmosphärendruck auf den Apparat stets grösser war als auf den offenen Manometerschenkel.

Die Berücksichtigung dieser beiden Correcturen war nothwendig, weil bei der Anwendung verschiedener Drucke auch diese Correcturen innerhalb ziemlich weiter Grenzen variiren.

§ 15. Eine weniger einfache dritte Correctur ist bedingt durch den von der Flüssigkeit im Apparat herrührenden Druck, von dem die Herren Thorpe und Rodger[1]) schreiben, dass er von allen Correcturen weitaus am schwierigsten zu bestimmen sei.

Wenn bei Beginn der Beobachtung das Flüssigkeitsniveau im rechten Schenkel bei der Marke m_1, im linken Schenkel bei r_1 steht, so ist der von der Flüssigkeit in diesem Moment herrührende Druck gegeben durch $h_1 \varrho$, wobei h_1 der Verticalabstand der beiden Marken und ϱ die Dichtigkeit der betreffenden Substanz ist. Dieser Druck tritt additiv zu dem am Manometer abgelesenen und mit den beiden obigen Correcturen versehenen Druck hinzu.

Indem nun das Flüssigkeitsniveau im rechten Schenkel des Apparates continuirlich sinkt, während es im linken Schenkel fortwährend steigt, nimmt die Grösse dieses Druckes von dem Maximalwerth $h_1 \varrho$ dauernd ab, wird in dem Moment zu Null, in welchem die beiden Niveaus in derselben Horizontalebene sich befinden, und gelangt schliesslich zu dem Minimalwerth $h_2 \varrho$, der dann erreicht ist, wenn die Flüssigkeitsoberfläche im rechten Schenkel bei der Marke m_2 steht, während der Meniscus im linken Schenkel sich etwa bei r_2 befindet.

Wäre es möglich, die beiden Seiten des Apparates vollständig congruent herzustellen, so liesse sich, wenigstens annähernd, durch entsprechende Füllung erreichen, dass der Ueberdruck, der durch das Gewicht der Flüssigkeitssäule am

1) Thorpe u. Rodger, Phil. trans. 185. p. 360. 1894.

Anfang der Beobachtung bedingt ist, gerade aufgehoben wird durch das Manco an Druck während der übrigen Dauer der Beobachtung.

Es müssten für diesen Fall natürlich nicht nur die Niveaudifferenzen $m_1 r_1$ und $m_2 r_2$ einander entgegengesetzt gleich sein, sondern es müssten auch die Geschwindigkeiten der Aenderungen dieser Niveaudifferenzen in der ersten und zweiten Hälfte der Versuchsdauer entsprechend dieselben sein.

Wegen der Unmöglichkeit der Herstellung vollständig congruenter Schenkel wurde es nothwendig, den mittleren Druck auf irgend eine Art für jede Temperatur und jede Substanz zu bestimmen, was durch die Anwendung eines constanten Flüssigkeitsvolumens ermöglicht ward.

§ 16. In der schon mehrfach erwähnten Abhandlung der Herren Thorpe und Rodger verfuhr man etwa folgendermaassen. Längs der beiden Schenkel des Glischrometers wurde eine Papier-Millimeterscala (ca. 1 mm breit) aufgeklebt, eine gewisse Menge Wasser in den Apparat eingefüllt und dessen Temperatur mit der der Atmosphäre in Uebereinstimmung gebracht. Die Marke m_1 wurde durch ein Kathetometer fixirt, und diejenige Stelle r_1 bestimmt und durch einen feinen horizontalen Strich markirt, welche das Flüssigkeitsniveau im linken Schenkel einnimmt, wenn das im rechten gerade m_1 berührt. Während nun der Meniscus im rechten Schenkel bis m_2 fiel, wurden die Niveaus in den beiden Schenkeln aufs neue an dem Kathetometer und den Papierscalen abgelesen, so oft der Meniscus im einen Schenkel einen engeren Theil des Apparates verliess, um in einen weiteren einzutreten oder umgekehrt; endlich wurde die Kathetometerablesung der Marke m_2 ausgeführt, das Niveau der Flüssigkeit mit derselben in Berührung gebracht und die Stelle des entsprechenden Niveaus im linken Schenkel abgelesen und eingeätzt; die Stellen entsprechender Niveaus wurden mit gleichen Ziffern versehen. Bei unveränderter Temperatur wurden dann zunächst die Zeiten beobachtet, welche die Flüssigkeit nöthig hatte, um im rechten Schenkel von den Stellen 1_R zu 2_R, von 2_R zu 3_R etc. zu fliessen. Dann war es möglich, eine Curve zu entwerfen, die zu Abscissen die Zeiten, zu Ordinaten die Flüssigkeitshöhen $1_R - 1_L$, $2_R - 2_L$ etc. hatte. Die Curve

bestand aus zwei Theilen, von denen der eine über, der andere unter der Abscissenaxe verlief; indem man nun die Differenz aus der Fläche, die zwischen dem oberen Curventheil und der Abscissenaxe eingeschlossen war, und derjenigen, die zwischen dem unteren Theil der Curve und der Abscissenaxe lag, durch die ganze Dauer der Beobachtung dividirte, erhielt man die mittlere Höhe ausgedrückt in Centimetern Wasser von der Dichte, welche der bei dem Versuch angewendeten Temperatur entspricht. Um diese Höhen in die Form einer Correctur zu bringen, die auf die reducirte Ablesung am Manometer angewendet werden konnte, musste man den Dichtigkeiten der einzelnen Flüssigkeiten Rechnung tragen und ebenso der Aenderung der Dichtigkeit mit der Temperatur.

Aus diesem Grunde musste, da die Herren Thorpe und Rodger abwechselnd mit dem Flüssigkeitsvolumen im rechten und dann wieder im linken Schenkel arbeiteten, für jeden derselben eine Tabelle construirt werden, aus der man, wenn ϱ die Dichte der Flüssigkeit bei 0^0 und s das Volumen ist, welches 1 ccm der Substanz von 0^0 bei der Beobachtungstemperatur einnimmt, den Werth in Centimetern Wasser von 4^0 C. entnehmen konnte, welcher der mittleren „effectiven" Druckhöhe der Flüssigkeit im Apparat entspricht.

Dieses Verfahren, um den von der Flüssigkeit im Apparat herrührenden Druck zu finden, hat, ganz abgesehen von den diesen vielen Kathetometerablesungen anhaftenden Ungenauigkeiten und der Fehlerhaftigkeit der Curven, den grossen Nachtheil, dass jedesmal das Volumen der Flüssigkeit so einzurichten ist, dass diese Curven auch Anwendung finden können.

Diesem Zweck dienen die Marken k_1 und k_3; man füllt von Anfang an etwas mehr Flüssigkeit in das Glischrometer ein, als man für den Versuch direct nöthig hat. Auf den linken Schenkel lässt man nun den Druck solange wirken, bis der Meniscus in demselben die Marke k_1 erreicht hat; in diesem Moment dreht man die Dreiweghähne so, dass der Druck auf den anderen Schenkel wirkt, sodass in dem letzteren die Oberfläche der Flüssigkeit, von der bereits in die angeschmolzene zwiebelähnliche Erweiterung übergeströmt ist, nun wieder sinkt und so ein weiteres Ueberströmen verhindert wird.

Alle diese Umständlichkeiten und die aus ihnen erwachsenden Fehler dürften wohl die Ursache dafür sein, dass diese Beobachtungsmethode mit horizontalen Capillaren, die so manche Vortheile bietet, gerade bei den neueren Untersuchungen keine Anwendung fanden.

§ 17. Indess lassen sich diese Schwierigkeiten durch einige ganz einfache Ueberlegungen überwinden, wofern man sich nur des Kunstgriffes bedient, statt der Beobachtungen an den zwei Schenkeln, wie dies bisher geschehen war, nur solche an einem, ich will sagen am rechten, vorzunehmen und zwar so, dass man ein und dasselbe Flüssigkeitsvolumen das eine Mal unter dem am Manometer gemessenen Druck P die Capillare passiren lässt, indem P auf den rechten Schenkel wirkt; das andere Mal soll der Druck P auf den anderen Schenkel des Apparates wirken, sodass jetzt die Zeit gemessen wird, welche dasselbe Flüssigkeitsquantum nöthig hat, um von der unteren Marke bis zur oberen zu steigen.

War bei der ersten Beobachtung, bei welcher die Flüssigkeit die Capillare von rechts nach links durchströmte, der anfängliche Ueberdruck

$$p_1 = h_1 \cdot \varrho,$$

so ist der entsprechende bei der zweiten Beobachtung, wo die Flüssigkeit die Capillare im entgegengesetzten Sinn passirt, wie sich aus der Anschauung ohne weiteres ergiebt,

$$p_1' = -h_1 \cdot \varrho$$

am Ende der zweiten Beobachtung. So entspricht jedem Ueberdruck beim ersten Versuch in jedem einzelnen Zeitmoment ein gleich grosses Druckmanco bei dem zweiten Versuch, jedoch so, dass die Aufeinanderfolge der einzelnen Niveaudifferenzen bei den zwei Versuchen gerade die umgekehrte ist.

Indem jeder Niveaudifferenz h_i beim ersten Versuch eine gleich grosse entgegengesetzte $-h_i$ beim zweiten Versuch, und daher jedem Ueberdruck p_i ein gleich grosser mit entgegengesetztem Vorzeichen, nämlich $-p_i$, entspricht, erkennt man, dass auch dem mittleren Ueberdruck p beim Strömen in dem einen Sinn ein gleich grosses mittleres Druckmanco $-p$ beim

Durchfliessen der Capillaren im entgegengesetzten Sinn gegenübersteht.

Wir bezeichnen mit η den Coefficienten der inneren Reibung, mit K die Constante, die durch die Dimensionen des Apparates bedingt ist, und für kreisförmigen Querschnitt die Grösse

$$K = \frac{\pi r^4}{8 v l}$$

hat, für elliptischen Querschnitt aber durch den Ausdruck

$$K = \frac{2 . \pi . a^3 b^3}{8 v (a^2 + b^2) l}$$

dargestellt ist, wie zuerst, nicht wie die Herren Thorpe und Rodger behaupten, von Hrn. Prof. Brückner gezeigt wurde, sondern schon viel früher durch Hrn. Prof. Dr. L. Graetz[1]) erwähnt wurde, wobei a und b die Halbaxen des elliptischen Querschnittes, v das benutzte Flüssigkeitsvolumen und l die Länge der Capillaren repräsentirt; ferner sei P der Druck, unter dem die Flüssigkeit die Capillare passirt, die beiden Correctionen wegen der Dichte des Wassers bei der Zimmertemperatur und der Differenz des Atmosphärendruckes auf den offenen Manometerschenkel und den einen Theil des Apparates bereits mit eingerechnet, dann ist nach Poiseuille

$$\eta = K . P . t.$$

Bringt man noch das Hagenbach'sche Correctionsglied an

$$\delta = - \frac{v . \varrho}{8 \pi . l . g} \cdot \frac{1}{t},$$

das sich für die nämliche Flüssigkeit bei derselben Temperatur durch

$$\delta = - k \cdot \frac{1}{l},$$

wobei k eine Constante ist, ausdrücken lässt, so ist die für η zur Anwendung kommende Formel beim Abwärtsfliessen

$$\eta = K (P + p) . t_1 - k \cdot \frac{1}{t_1}, \tag{1}$$

1) L. Graetz, Schlömilch's Zeitschr. f. Mathem. 25. p. 316. 1879.

während beim Aufwärtsfliessen, wie aus dem Vorhergehenden leicht ersichtlich ist, nothwendig

$$\eta = K(P - p) \cdot t_2 - k \cdot \frac{1}{t_2} \tag{2}$$

benutzt werden muss.

Bedenkt man nun, dass die Hagenbach'sche Correctur an und für sich schon ziemlich klein ist, so muss die Differenz

$$k \cdot \frac{1}{t_2} - k \cdot \frac{1}{t_1},$$

sobald man es so einrichtet, dass der mittlere Ueberdruck p bez. das mittlere Druckmanco $-p$ nicht übermässig gross ist, sich einer so kleinen Zahl nähern, dass sie innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler fällt und vernachlässigt werden kann.

Unter dieser Annahme lässt sich der mittlere Ueberdruck, wie aus den Gleichungen (1) und (2) hervorgeht, durch die sehr einfache Relation

$$p = \frac{t_2 - t_1}{t_2 + t_1} \cdot P \tag{3}$$

darstellen. Aendert sich, was ja im allgemeinen der Fall ist, der Druck P bei den beiden Beobachtungen, sodass man bei dem ersten Versuch den Durchschnittsdruck P_1, beim zweiten den mittleren Druck P_2 hat, so folgt durch dieselbe Operation für den mittleren, von der Flüssigkeit im Apparat herrührenden Druck:

$$p = \frac{P_2 t_2 - P_1 t_1}{t_2 + t_1}. \tag{4}$$

Die einzige Voraussetzung ist bei dieser Formel die Constanterhaltung der Temperatur.

Die so erhaltene Grösse p ist gleichzeitig ein vorzügliches Mittel, die Beobachtungen auf ihre Genauigkeit zu prüfen, und umgeht alle oben angeführten zahlreichen Kathetometerablesungen, die Construction einer Curve und die Berücksichtigung der Dichtigkeit der untersuchten Substanz.

§ 18. Da es sich aber in der vorliegenden Abhandlung um den Einfluss des Druckes auf die Grösse des durch obige

Formeln berechneten Coefficienten η handelt, so war es nothwendig, ein Mittel zu ersinnen, die bei dem bisher benutzten Apparat ziemlich bedeutenden Unterschiede zwischen dem bei Beginn des Versuches wirkenden Druck und dem am Ende desselben noch vorhandenen zu verkleinern, eine Differenz, die bei den Herren Thorpe und Rodger, soweit es aus der Zeichnung des Apparates hervorgeht, immerhin ca. 14 cm.ϱ (ϱ die Dichtigkeit der untersuchten Substanz) betragen haben muss.

Bei den zweifellos sehr grossen technischen Schwierigkeiten, welche der Construction eines Apparates gegenüberstehen, bei welchem ein constanter Druck das Durchströmen der Flüssigkeit durch die Capillare bewirkt, musste ich mich damit begnügen, den Apparat folgendermaassen umzuändern: Statt der cylindrischen Form der Schenkel gab ich dem Theil derselben, welcher dazu bestimmt ist, das verwendete Flüssigkeitsvolumen aufzunehmen, die Gestalt einer Kugel, wodurch die Differenz des anfangs und des schliesslich wirkenden Druckes auf ca. 4.ϱ cm reducirt wurde, was den Anforderungen auch vollständig genügt, indem ja die Aenderungen, wie Abschnitt III beweist, zumal bei höheren Drucken sehr geringe sind.

Die am Apparat an den beiden Schenkeln oben angeblasenen Kugeln mit den seitlichen Ansatzröhren sollen bei Untersuchungen von Lösungen das Eingiessen der zu lösenden Substanz ermöglichen, ohne dass deshalb der Apparat aus dem Bassin herausgenommen zu werden braucht; bei den in dieser Arbeit citirten Versuchen fanden dieselben keine Anwendung und waren deshalb stets geschlossen.

III. Abschnitt.

§ 19. Als ich während einer Untersuchungsreihe von Lösungen in Ameisensäure, um grössere Genauigkeit zu erhalten, den Druck von 130 cm Wasser auf 90 cm reducirte und einige der Versuche bei diesem verminderten Druck wiederholte, erhielt ich für den berechneten Coefficienten einen bei sämmtlichen Versuchen grösseren Werth als zuvor. Nachdem ich mich davon überzeugt hatte, dass diese unerwartete Aende-

rung nicht etwa eine Folge davon sein konnte, dass die Ameisensäure aus der vielleicht nicht genügend getrockneten Luft, die auf die Flüssigkeit wirkte, Wasser aufgenommen, oder dass irgend ein anderer störender Umstand die Beobachtung beeinflusst hatte, kam ich auf den Gedanken, dass der veränderte Druck die Ursache an der Nichtübereinstimmung der Beobachtungen sein könnte, und machte eine grosse Anzahl von Versuchen, die mir darüber Klarheit verschaffen sollten.

Im Folgenden seien einige Resultate aus diesen Beobachtungen angeführt; dieselben lassen wohl eine dauernde Abnahme mit wachsendem Druck erkennen, ohne jedoch denselben Werth zu besitzen wie die an späterer Stelle angegebenen, weil der hierzu benutzte Apparat noch der von den Herren Thorpe und Rodger mit den cylindrisch geformten Schenkeln war, bei dem sich die grosse Differenz zwischen dem Anfangs- und Enddruck eines Versuches störend geltend macht.

Die folgende Tabelle zeigt einige Resultate solcher orientirenden Versuche, indem für Wasser bei 16,1° C. bei den unter P angeführten Drucken für die an zwei Apparaten mit nahezu gleichen Capillaren gleichzeitig vorgenommenen Beobachtungen unter η_I und η_{II} die aus der Beobachtung erhaltenen Werthe eingesetzt sind, während unter p die mittleren, von der Flüssigkeit im Apparat herrührenden Ueberdrucke, wie sie sich aus der Formel (4) ergeben, berechnet sind; t_I und t_{II} sind die zu den Versuchen nothwendigen Zeiten, die Pfeile ↓ oder ↑ deuten an, ob sich die Flüssigkeit in dem Beobachtungsschenkel abwärts oder aufwärts bewegte.

P	t_I	t_{II}	η_I	η_{II}
↓ 95,72	9′ 53,8	9′ 11″	0,011007	0,011026
↑ 95,67	8 46,4	7 57		
↓ 43,58	23 44,6	23 9,4	0,011174	0,011193
↑ 43,58	16 56	16 36,4		
↓ 25,50	48 56	46 27	0,011400	0,011429
↑ 25,36	ca. 26 42	26 57,2		

Für Wasser bei 16,48° C. ergab sich auf dieselbe Art

P	t_I	t_{II}	η_I	η_{II}
↑ 96,66	8′ 13,2″	7′ 50″	0,011020	0,010946
↓ 96,66	9 23,6	8 54,8		
↑ 46,13	16 11,6	15 38,6	0,011276	0,011313
↓ 46,13	22 30,2	21 24,6		

Analog für Wasser bei 10° C. ($p_I = 0{,}38$ cm, $p_{II} = 1{,}77$ cm).

P	t_I	t_{II}	η_I	η_{II}
↓ 135,74	7′ 20,4″	7′ 17,8	0,013090	0,013086
↑	7 17,8	6 52,6		
↓ 135,91	7 20	7 12,8	0,013094	0,013078
↑	ca. 7 17,2	6 52		
↓ 86,11	11 38,8	11 16	0,013134	0,013128
↑	11 32,4	10 48,8		
↓ 36,40	28 8″	28 6,4	0,013324	0,013416
↑	27 34,2	25 25,6		

So ergab sich für Aethylalkohol bei 10° die folgende Tabelle.

P	t	η
↑ 161,69	19′ 36,6″	0,014772
↓ 161,84	19 35,2	
↑ 161,96	19 35″	
↓ 124,39	25 30,6	0,014799
↑ 124,49	25 30,6	
↑ 85,77	37 3,6	0,014808
↓ 86,01	37 54,2	
↑ 25 13	127 4,2	0,014894

§ 20. Nach diesen vorbereitenden Versuchen und nach einer sorgfältigen Aichung der Manometerscala liess ich mir

den Apparat der Herren Thorpe und Rodger umändern, indem ich, wie schon erwähnt, statt eines cylindrischen Raumes eine Kugel zur Aufnahme der Flüssigkeit benutzte. Ausser dieser Aenderung brachte ich noch eine zweite an, welche das Einschmelzen der Capillaren betrifft; statt dieselbe in der Mitte des Querstückes anzuschmelzen und sie damit immerhin der sehr grossen Gefahr des Geknicktwerdens und einer Verengung der lichten Weite beim Anschmelzen auszusetzen, liess ich sie an den Enden nach Art der Befestigung der Thermometerröhrchen anblasen, um so das Auftreten etwaiger Wirbelbewegungen möglichst zu verhindern.

§ 21. Im nachfolgenden Paragraph sollen die meiner Ansicht nach einwurfsfreien Versuchsreihen in der Form von Tabellen möglichst übersichtlich dargestellt werden; die Tabellen sind zu diesem Zwecke folgendermaassen angeordnet.

Unter P ist der an den beiden Manometerschenkeln L und R am Anfang und am Ende eines jeden Versuches abgelesene Stand des Wassermeniscus eingetragen, um die Güte der einzelnen Beobachtungen zu charakterisiren; P_0 ist der durch die zwei Correctionen, die in § 14 besprochen wurden, verbesserte Druck. Die an dem Chronographen abgelesene Versuchsdauer ist t; η' ist der aus dem reducirten Druck P_0 und der Zeit t berechnete Coefficient der Viscosität, also ohne Rücksicht auf den von der Flüssigkeit im Apparat ausgeübten mittleren Druck p; statt η' ist an manchen Stellen auch dieser mittlere Druck p berechnet; die Hagenbach'sche Correctur ist mit δ, mit Δ der Fehler im Reibungscoefficienten bezeichnet, der durch einen Fehler von 0,02 cm in der Ablesung des Druckes und durch einen solchen von 0,2 sec in der Bestimmung der Zeit bedingt ist. η ist der aus der Poiseuille'schen Formel und den sämmtlichen Versuchsdaten einer Versuchsreihe erhaltene Werth für die innere Reibung, folglich $\eta = \eta - \delta$ der gesuchte Coefficient mit Berücksichtigung der Hagenbach'schen Correctur.

Die einzelnen Versuche bei annähernd constantem Druck sind mit kleinen lateinischen Buchstaben, die einzelnen Versuchsgruppen bei verschiedenen Drucken aber derselben Temperatur und mit derselben Substanz sind mit arabischen Ziffern bezeichnet, während die Versuchsreihen, welche durch die

Verschiedenheit der untersuchten Substanzen und der angewendeten Temperaturen ausgezeichnet sind, römische Ziffern tragen. k ist die Constante des benutzten Apparates:

$$k = \frac{\pi \cdot a^3 b^3}{4 v (a^2 + b^2) l}.$$

I. Versuchsreihe.

Wasser, destillirt, bei 15° C. Apparat; Capillare: $a = 0{,}04678$ cm, $b = 0{,}03742$ cm, $l = 19{,}7$ cm, Volumen $v = 0{,}604$ ccm; $\log k = 0{,}99409 - 8$.

1. $P = 163{,}60$, $\eta = 0{,}011294$.

	P (R / L)	P_0	t	
a) ↓	190,37 – 26,56 190,37 – 26,56	163,64	11′ 36,4″	
				$p_{a,b} = + 0{,}87$
b) ↑	190,37 – 26,56 190,35 – 26,58	163,62	11 44	
				$p_{b,c} = + 0{,}84$
c) ↓	190,34 – 26,59 190,33 – 26,60	163,57	11 36,2	
				$p_{a,d} = + 0{,}86$
d) ↑	190,33 – 26,60 190,35 – 26,58	163,58	11 44,6	
				$p_{d,e} = + 0{,}87$
e) ↓	190,35 – 26,58 190,37 – 26,56	163,62	11 36,8	

$\bar{\eta} = 0{,}011308$, $\delta = 0{,}000017$, $\Delta = 0{,}000005$.

2. $P = 121{,}50$, $\eta = 0{,}011306$.

a) ↓	168,80 – 47,32 168,84 – 47,28	121,40	15′ 38,8″	
				$p_{a,b} = + 0{,}90$
b) ↑	168,85 – 47,27 168,89 – 47,23	121,50	15 52	
				$p_{d,a} = 0{,}86$
c) ↓	168,88 – 47,24 168,89 – 47,23	121,53	15 37,2	
				$p_{c,d} = 0{,}90$
d) ↑	168,90 – 47,22	121,56	15 51	

$\bar{\eta} = 0{,}011319$, $\delta = 0{,}000013$, $\Delta = 0{,}000004$.

3. $P = 48{,}32$, $\eta = 0{,}011408$.

	P R	P L	P	t	
a) ↓	131,64 – 83,29		48,31	39′ 23″	
	131,65 – 83,28				$p_{a,b} = 0{,}90$
b) ↑	131,65 – 83,28		48,33	40 50,2	
	131,67 – 83,26				

$\bar{\eta} = 0{,}011413$, $\delta = 0{,}000005$, $\Delta = 0{,}000006$.

4. $P = 24{,}29$, $\eta = 0{,}011590$.

a) ↓	119,22 — 94,97		24,27	77′ 54″	
	119,29 – 94,91				$p = 0{,}83$
b) ↑	119,29 – 94,91		24,31	83 16	
	119,21 – 94,98				

$\bar{\eta} = 0{,}011593$, $\delta = 0{,}000003$, $\Delta = 0{,}000009$.

5. $P = 121{,}70$, $\eta = 0{,}011313$.

a) ↓	168,91 – 47,18		121,63	15′ 39,4″	
	168,94 – 47,15				$p_{a,b} = 0{,}71$
b) ↑	168,95 – 47,15		121,70	15 48,6	
	168,98 – 47,12				$p_{b,c} = 0{,}73$
c) ↓	169,00 – 47,10		121,76	15 37,8	
	169,00 – 47,09				

$\bar{\eta} = 0{,}011325$, $\delta = 0{,}000012$, $\Delta = 0{,}000004$.

6. $P = 159{,}90$, $\eta = 0{,}011298$.

a) ↑	188,50 – 28,33		159,89	12′ 0,4″	
	188,50 – 28,33				$p_{a,b} = 0{,}71$
b) ↓	188,50 – 28,33		159,89	11 54	
	188,51 – 28,32				$p_{b,c} = 0{,}75$
c) ↓	188,51 – 28,31		159,91	12 0,6	

$\bar{\eta} = 0{,}011315$, $\delta = 0{,}000017$, $\Delta = 0{,}000004$.

Dass bei den Versuchsgruppen 4., 5., 6. die Werthe von p abnehmen, ist durch das Verdunsten des Wassers zu erklären, indem 4. am folgenden, 5. und 6. aber erst am übernächsten Tag beobachtet wurden.

II. Versuchsreihe.

Wasser, destillirt, bei 15° C.; Apparat II: Capillare $a = 0{,}06132$ cm; $b = 0{,}04599$ cm; $l = 4{,}6$ cm; Volumen $v = 3{,}88$ ccm; $\log k = 0{,}22491 - 7$.

1. $P = 167{,}76$ cm, $\eta = 0{,}011302$.

	P R	L	P_0	t	
a) ↓	192,60	24,61	167,77	6′ 44,6″	
a) ↓	192,60	24,61			
b) ↑	192,60	24,62	167,76	6 44,2	$p_{a,b} = 0{,}10$
c) ↓	192,60	24,62	167,76	6 44,6	$p_{b,c} = 0{,}08$
d) ↑	192,60	24,62	167,76	6 44,2	$p_{c,d} = 0{,}08$

$\overline{\eta} = 0{,}011387$, $\delta = 0{,}000085$, $\Delta = 0{,}000007$.

2. $P = 116{,}22$ cm, $\eta = 0{,}011326$.

a) ↓	166,30	49,93	116,22	9′ 43″	
a) ↓	166,30	49,93			
b) ↑	166,30	49,93	116,22	9 44	$p_{a,b} = 0{,}09$
c) ↓	166,30	49,93	116,23	9 43,4	$p_{b,c} = 0{,}06$
c) ↓	166,31	49,92			
d) ↑	166,31	49,92	116,24	9 43,8	$p_{c,d} = 0{,}06$

$\eta = 0{,}011365$, $\delta = 0{,}000059$, $\Delta = 0{,}000006$.

3. $P = 76{,}55$ cm, $\eta = 0{,}011358$.

a) ↓	146,19	69,57	76,54	14′ 47″	
a) ↓	146,20	69,56			
b) ↑	146,20	69,56	76,55	14 47,8	$p_{a,b} = 0{,}06$
c) ↓	146,20	69,56	76,55	14 46,4	$p_{b,c} = 0{,}04$
d) ↑	146,20	69,56	76,55	14 47,4	$p_{c,d} = 0{,}04$

$\eta = 0{,}011400$, $\delta = 0{,}000041$, $\Delta = 0{,}000006$.

4. $P = 46{,}41$ cm, $\eta = 0{,}011418$.

a) ↓	130,70	84,32	46,32	24′ 30″	
a) ↓	130,71	84,31			$p = 0{,}05$
b) ↑	130,72	84,31	46,35	24 32	
b) ↑	130,73	84,30			

$\overline{\eta} = 0{,}011441$, $\delta = 0{,}000023$, $\Delta = 0{,}000006$.

5. $P = 24{,}50$ cm, $\eta = 0{,}011543$.

	P R	P L	P_0	t	
a) ↓	119,40	95,00	24,44	46′ 41,4″	
	119,47	94,93			$p = 0{,}07$
b) ↑	119,47	94,92	24,56	46 40	
	119,51	94,88			

$\bar{\eta} = 0{,}011555$, $\delta = 0{,}000012$, $\Delta = 0{,}000005$.

6. $P = 44{,}10$ cm, $\eta = 0{,}011424$.

a) ↑	129,50	85,50	44,04	25′ 52″	
	129,60	85,40			$p = 0{,}07$
b) ↓	129,60	85,41	44,15	25 42	
	129,62	85,39			

$\bar{\eta} = 0{,}011446$, $\delta = 0{,}000022$, $\Delta = 0{,}000006$.

III. Versuchsreihe.

Wasser, destillirt, bei 10° C.; Apparat: Capillare $a = 0{,}06129$ cm; $b = 0{,}04597$ cm; $l = 4{,}6$ cm; Volumen $v = 3{,}88$ ccm; $\log k = 0{,}22414 - 7$.

1. $P = 163{,}02$ cm, $\eta = 0{,}013068$.

	P R	P L	P_0	t	η'
a) ↑	190,00	26,80	163,01	8′	0,013110
	190,00	26,80			
b) ↓	190,00	26,80	163,02	8′ 2″	0,013160
	190,02	26,79			
c) ↑	190,02	26,79	163,04	8′	0,013106

$\bar{\eta} = 0{,}013139$, $\delta = 0{,}000071$, $\Delta = 0{,}000009$.

2. $P = 123{,}27$ cm, $\eta = 0{,}013090$.

a) ↓	169,79	46,39	123,25	10′ 38,8″	0,013191
	169,79	46,39			
b) ↑	169,79	46,40	123,25	10 35	0,013110
	169,80	46,39			
c) ↓	169,81	46,38	123,29	10 38,2	0,013183
	169,82	46,37			
d) ↑	169,82	46,37	123,28	10 34,4	0,013104
	169,80	46,39			

$\bar{\eta} = 0{,}013144$, $\delta = 0{,}000054$, $\Delta = 0{,}000008$.

3. $P = 80{,}90$ cm, $\eta = 0{,}013123$.

	P R	P L	P_0	t	η'
a) ↓	148,30	67,38	80,85	16′ 15,2″	0,013210
	148,32	67,36			
b) ↑	148,32	67,36	80,91	16 6,6	0,013104
	148,36	67,32			
c) ↓	148,36	67,32	80,93	16 14,4	0,013213
	148,34	67,34			

$\bar{\eta} = 0{,}013157$, $\delta = 0{,}000034$, $\Delta = 0{,}000008$.

4. $P = 47{,}80$ cm, $\eta = 0{,}013171$.

a)[1] ↑	131,40	83,55	47,80	27′ 14,8″	0,013093
	131,40	83,55			
b) ↓	130,89	84,07	46,80	28 16	0,013299
	130,92	84,05			
c) ↑	130,92	84,04	46,82	27 49,2	0,013094
	130,92	84,04			
d) ↓	130,91	84,05	46,79	28 15,4	0,013291
	130,90	84,06			

$\bar{\eta} = 0{,}013192$, $\delta = 0{,}000021$, $\Delta = 0{,}000009$.

5. $P = 24{,}70$ cm, $\eta = 0{,}013331$.

a) ↑	119,49	94,80	24,67	53′ 1,6″	0,013151
	119,50	94,79			
b) ↓	119,52	94,77	24,72	54 27,4	0,013533
	119,52	94,77			

$\bar{\eta} = 0{,}013342$, $\delta = 0{,}000011$, $\Delta = 0{,}000012$.

1) Die erste Beobachtung dieser Gruppe wurde längere Zeit vor den nachfolgenden gemacht, weshalb die Druckänderung zwischen a) und b) nicht stetig zu sein braucht.

IV. Versuchsreihe.

Aethyläther, über Natrium destillirt, bei 10° C; Apparat: Capillare $a = 0{,}04956$ cm; $b = 0{,}03717$ cm; $l = 4{,}7$ cm; Volumen $v = 3{,}50$ ccm; $\log k = 0{,}89073 - 8$.

1. $P = 102{,}47$ cm, $\eta = 0{,}002528$.

	P R	P L	P_0	t	η'
a) ↓	159,31	56,81	102,41	5′ 26,8″	0,002602
	159,37	56,75			
b) ↑	159,37	56,75	102,49	5′ 26,4	0,002601
	159,38	56,74			
c) ↓	159,38	56,75	102,49	5′ 27,2	0,002607
d) ↑	159,36	56,76	102,48	5′ 26,0	0,002597
	159,38	56,74			

$\bar{\eta} = 0{,}002600$, $\delta = 0{,}000072$, $\Delta = 0{,}000002$.

2. $P = 76{,}83$ cm, $\eta = 0{,}002545$.

a) ↓	146,34	69,50		ca. 7′ 17,2″
	146,37	69,47		
b) ↑	146,37	69,47	76,80	7′ 13,8	0,002591
	146,38	69,46			
c) ↓	146,39	69,45	76,84	7′ 16,2	0,002606
	146,40	69,44			
d) ↑	146,39	69,45	76,84	7′ 13,6	0,002591
e) ↓	146,39	69,45	76,84	7′ 16,4	0,002607

$\bar{\eta} = 0{,}002599$, $\delta = 0{,}000054$, $\Delta = 0{,}000002$.

3. $P = 46{,}10$ cm, $\eta = 0{,}002571$.

a) ↓	130,59	84,49	46,09	12′ 2,8″	0,002590
	130,64	84,44			
b) ↓	130,65	84,43	46,14	12′ 9,2	0,002616
	130,63	84,45			
c) ↑	130,62	84,47	46,10	12′ 2,2	0,002589
	130,63	84,46			
d) ↓	130,61	84,48	46,07	12′ 10,6	0,002617
	130,61	84,48			

$\bar{\eta} = 0{,}002603$, $\delta = 0{,}000032$, $\Delta = 0{,}000002$.

4. $P = 30{,}16$ cm, $\eta = 0{,}002589$.

	P R	L	P_0	t	η'
a) ↓	122,35	92,21	30,11	18′ 44,8″	0,002633
↓	122,36	92,20			
b) ↑	122,36	92,20	30,14	18′ 23,6	0,002586
↑	122,38	92,18			
c) ↓	122,38	92,18	30,18	18′ 41,8	0,002633
↓	122,39	92,17			
d) ↑	122,40	92,17	30,20	18′ 22	0,002588

$\bar{\eta} = 0{,}002610$, $\delta = 0{,}000021$, $\Delta = 0{,}000002$.

5. $P = 19{,}59$ cm, $\eta = 0{,}002611$.

a) ↓	116,90	97,32	19,58	29′ 5,8″	0,002658
↓	116,92	97,30			
b) ↑	116,92	97,30	19,60	28′ 21	0,002592
↑	116,92	97,30			
c) ↓	116,92	97,30	19,60	29′ 5,2	0,002660
↓	116,92	97,30			
d) ↑	116,90	97,32	19,55	28′ 33,6	0,002602
↑	116,87	97,35			

$\bar{\eta} = 0{,}002624$, $\delta = 0{,}000013$, $\Delta = 0{,}000003$.

V. Versuchsreihe.

Chloroform bei 15° C; Apparat: Capillare $a = 0{,}04956$ cm; $b = 0{,}03717$ cm; $l = 4{,}7$ cm; Volumen $v = 3{,}50$ ccm; $\log k = 0{,}89073 - 7$.

1. $P = 131{,}45$ cm, $\eta = 0{,}005823$.

	P R	L	P_0	t	η'
a) ↓	174,00	42,35	131,48	9′ 37,4″	0,005904
↓	174,00	42,35			
b) ↑	174,00	42,35	131,46	9 37,8	0,005906
↑	173,98	42,37			
c) ↓	173,98	42,37	131,43	9 38,2	0,005909
↓	173,98	42,37			
d) ↑	173,96	42,39	131,41	9 37,8	0,005906
↑	173,97	42,38			

$\bar{\eta} = 0{,}005906$, $\delta = 0{,}000082$, $\Delta = 0{,}00004$.

2. $P = 85{,}31$ cm, $\eta = 0{,}005849$.

	P R	P I.	P_0	t	η'
a) ↓	150,50 – 65,22	150,51 – 65,21	85,20	14′ 51,6″	0,005907
b) ↑	150,51 – 65,21	150,51 – 65,21	85,20	14 49,8	0,005895
c) ↓	150,57 – 65,18	150,64 – 65,14	85,36	14 50	0,005907
d) ↑	150,65 – 65,14	150,70 – 65,09	85,46	14 47,2	0,005895

$\bar{\eta} = 0{,}005901$, $\delta = 0{,}000052$, $\Delta = 0{,}000004$.

3. $P = 47{,}19$ cm, $\eta = 0{,}005880$.

a) ↓	131,07 – 83,91	131,11 – 83,87	47,14	26′ 56″	0,005923
b) ↑	131,12 – 83,86	131,17 – 83,81	47,25	26 44,6	0,005895

$\bar{\eta} = 0{,}005909$, $\delta = 0{,}000029$, $\Delta = 0{,}000004$.

4. $P = 25{,}28$ cm, $\eta = 0{,}005921$.

a) ↓	119,80 – 94,49	119,82 – 94,47	25,28	50′ 33″	0,005962

Für $p = 0{,}11$, wie es sich aus den vorhergehenden Versuchen ergiebt, folgt

$\eta = 0{,}005936$, $\delta = 0{,}000015$, $\Delta = 0{,}00005$.

5. $P = 75{,}40$ cm, $\eta = 0{,}005850$.

a) ↑	145,57 – 70,10	145,58 – 70,09	75,40	16′ 47,6″	0,005907
b) ↓	145,57 – 70,09	145,56 – 70,10	75,39	16 44	0,005885

$\bar{\eta} = 0{,}005896$, $\delta = 0{,}000046$, $\Delta = 0{,}00004$.

Berechnet man für die einzelnen Versuchsgruppen die Werthe des von dem Chloroform im Apparat herrührenden Druckes, so erhält man

1. $p = -0{,}03$, 2. $-0{,}09$, 3. $-0{,}11$, 5. $-0{,}14$,

also wachsende Werthe von $-p$, wie auch aus der Verdunstung des Chloroforms nothwendig folgt.

IV. Abschnitt.

§ 22. Wenn man aus den in dem III. Abschnitt citirten Versuchsresultaten die Aenderung des berechneten Coefficienten η mit dem Druck graphisch darstellt, so kommt man bei einer näheren Betrachtung der erhaltenen Curven zu der Ansicht, dass sich diese Abhängigkeit vom Druck näherungsweise darstellen lässt durch eine Hyperbel, welche die η-Axe einerseits und eine Parallele zur P-Axe andererseits zu Asymptoten hat; die Hyperbel ist eine gleichseitige, weil ihre Asymptoten aufeinander senkrecht stehen, und lässt sich durch die Gleichung

$$P(\eta - a) = b$$

analytisch wiedergeben, wobei a den Abstand der horizontalen Asymptote von der eigentlichen P-Axe:

$$\eta = 0$$

angiebt, oder physikalisch gesprochen, den Grenzwerth repräsentirt, dem sich der Reibungscoefficient mit wachsendem Drucke nähert. Die Constante b ist abhängig von den Dimensionen des Apparates und giebt ein Maass für die Krümmung der Curven, indem aus

$$P(\eta - a) = b$$

$$\eta = \frac{b}{P} + a$$

und daraus

$$\frac{d\eta}{dP} = -\frac{b}{P^2}\,; \quad \frac{d^2\eta}{dP^2} = +\frac{2b}{P^3}$$

und für den Krümmungsradius

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{d\eta}{dP}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2\eta}{dP^2}}$$

also

$$\varrho = \frac{P^3\left(1 + \frac{b^2}{P^4}\right)^{3/2}}{2b}$$

folgt.

Für die Krümmung der Curven wird demnach

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{2b \,.\, P^2}{(b^2 + P^4)^{3/2}}.$$

Vernachlässigt man wegen der Kleinheit von b den Ausdruck b^2 gegenüber dem relativ grossen Werth von P^2 bei den angewendeten Drucken, so ergiebt sich als annäherndes Maass für die Krümmung der einzelnen Curven der Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{2\,b}{P^3}$$

also eine Proportionalität mit b für die verschiedenen Versuchsreihen, wenn man gleiche Drucke voraussetzt.

Um den Werth der Constanten a zu erhalten, bediente ich mich des nachfolgenden Näherungsverfahrens.

Ausgehend von einem Werthe a_1, der kleiner ist als alle für die betreffende Substanz bei der Versuchstemperatur erhaltenen Reibungscoefficienten (die Hagenbach'sche Correctur bereits mit eingerechnet) und der, soweit man es aus der Zeichnung ersehen kann, die ja nur für Drucke von höchstens 180 cm Wasser noch Werthe von η angiebt, in der Nähe von $\eta = a$ liegt, setzt man

$$a = a_1 - z\,,$$

sodass

$$P^3 (\eta - a_1 + z) = b$$

wird, wobei $\eta - a_1$ eine nicht zu grosse Zahl wird, mit der sich bequem rechnen lässt.

Wegen der unvermeidlichen Fehler, welche den einzelnen Versuchen anhaften, kann man nicht den einfachsten Weg einschlagen, nämlich aus zwei Versuchen z und b berechnen und dann die Uebereinstimmung der anderen Versuchsergebnisse mit den beiden zur Berechnung benutzten nachweisen; es empfiehlt sich vielmehr aus verschiedenen Paaren von Versuchen, indem man für je zwei Versuche b als gleich annimmt, die Werthe von z durch Elimination von b zu finden, den Mittelwerth zu nehmen, für diesen die Constante b aus jedem Versuch und aus dem Mittelwerth von b wiederum die z zu rechnen. Ist z_m der so gewonnene Mittelwerth, so stellt

$$\eta = a = a_1 - z_m$$

die andere Asymptote dar, und für jeden Werth P folgt ohne die geringste Schwierigkeit das zugehörige η aus der überaus einfachen Gleichung

$$\eta = \frac{b}{P^3} + a.$$

§. 23. So gestaltet sich für die I. Versuchsreihe (vgl. auch Fig. 1), wenn man

$$a_1 = 0{,}011250$$

annimmt, die Zusammenstellung der Versuchsresultate wie folgt:

1. $163{,}6 \quad (44 + z) \,.\, 10^{-6} = b$
2. $121{,}5 \quad (56 + z) \,.\, 10^{-6} = b$
3. $48{,}3 \quad (158 + z) \,.\, 10^{-6} = b$
4. $24{,}3 \quad (340 + z) \,.\, 10^{-6} = b$
5. $121{,}7 \quad (63 + z) \,.\, 10^{-6} = b$
6. $159{,}9 \quad (48 + z) \,.\, 10^{-6} = b$

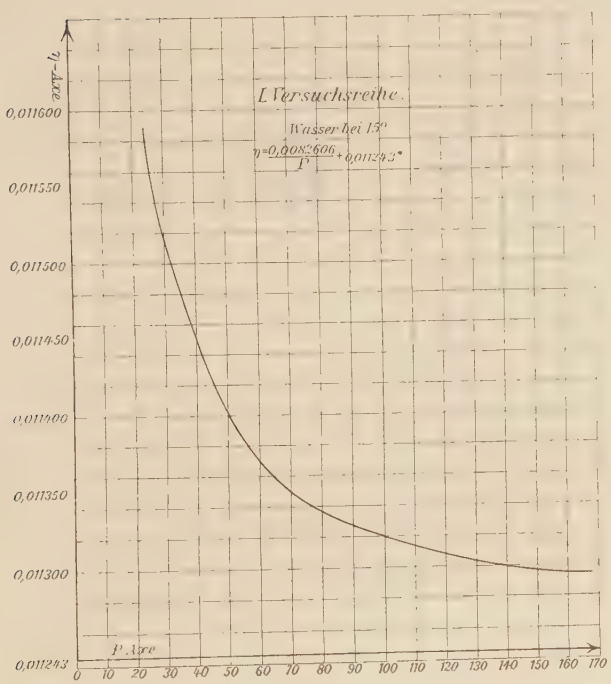

Fig. 1.

Als Mittelwerth von z erhält man:

$$z = 8{,}2 \,.\, 10^{-6}.$$

Der Mittelwerth von b, der durch Einsetzen dieses Werthes von z in die obigen 6 Gleichungen sich ergiebt, ist

$$b = 8260{,}6 \,.\, 10^{-6}.$$

Für diesen Werth folgt als arithmetisches Mittel der Werthe von z die Zahl

$$z = 7 \,.\, 10^{-6},$$

sodass die Aenderung der inneren Reibung mit dem Druck für diese Versuchsreihe dargestellt wird durch die Hyperbelgleichung:

$$\eta = \frac{0{,}0082606}{P} + 0{,}011243.$$

Um die Annäherung, mit welcher durch diese Gleichung die gewonnenen Versuchsresultate wiedergegeben werden, recht

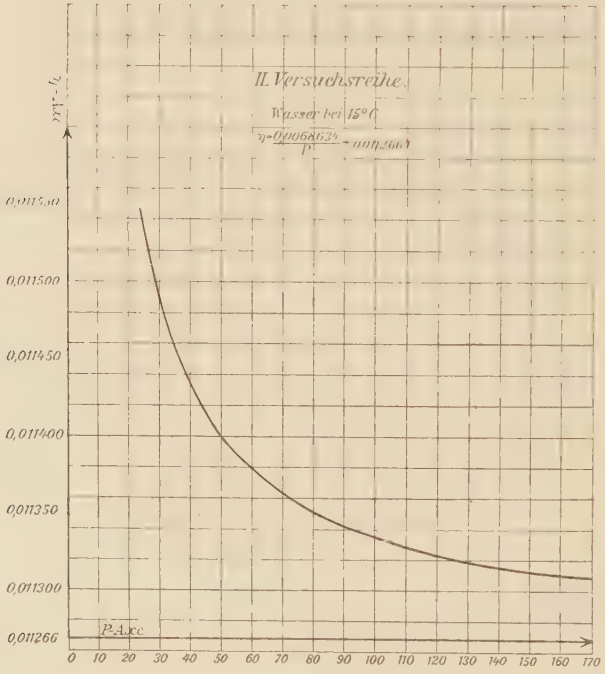

Fig. 2.

in die Augen springen zu lassen, habe ich in der folgenden Tabelle die aus der Formel sich ergebenden Werte η_1 und die aus der Beobachtung folgenden η_2 bei dem angewendeten Druck P zusammengestellt und unter $\eta_1 - \eta_2$ die Differenzen beider eingetragen, während unter Δ wie in den Versuchs-

tabellen die bei den unter § 21 angenommenen Beobachtungsfehlern sich ergebenden Fehler von η aufgeführt sind; die Versuche sind zum Zwecke der grösseren Uebersichtlichkeit nach fallenden Drucken geordnet.

P	η_1 (berechnet)	η_2 (beobachtet)	$(\eta_1 - \eta_2) . 10^6$	$\Delta . 10^6$
163,6	0,011293	0,011294	− 1	4
160,0	0,011293	0,011296	− 3	4
121,5	0,011311	0,011306	+ 5	4
121,7	0,011311	0,011312	− 1	4
48,3	0,011414	0,011408	+ 6	6
24,3	0,011583	0,011590	− 7	9

Der Umstand, dass die Differenzen zwischen den aus der Formel berechneten und den aus der Beobachtung sich ergebenden Werthen fast überall innerhalb der Fehlergrenzen liegen, beweist die Brauchbarkeit der aufgestellten Formel innerhalb der bei den Versuchen angewendeten Drucke.

Um zu zeigen, dass sich die Constanten a und b mit dem Apparat etwas ändern, dass aber die Abhängigkeit des η von P doch annähernd dieselbe bleibt, sei im Folgenden die II. Versuchsreihe (ebenfalls Wasser bei 15° C., nur in einem Apparat mit einer kürzeren Capillare) derselben Rechnung unterzogen (vgl. auch Fig. 2). Aus den Versuchen entnehmen wir für

$$a_1 = 0{,}011270$$

1. $167{,}8\ (32 + x) . 10^{-6} = b$
2. $116{,}2\ (56 + x) . 10^{-6} = b$
3. $76{,}6\ (89 + x) . 10^{-6} = b$
4. $46{,}4\,(148 + x) . 10^{-6} = b$
5. $24{,}5\,(273 + x) . 10^{-6} = b$
6. $44{,}1\,(154 + x) . 10^{-6} = b$

Für die Werthe

$$b = 0{,}0068634$$

und

$$a = 0{,}011266^4$$

liefert die Formel

$$\eta = \frac{0{,}0068634}{P} + 0{,}011266^4$$

eine Annäherung, wie die folgende Tabelle sie zeigt:

P	η_1	η_2	$\eta_1 - \eta_2$	Δ
167,8	0,011307	0,011302	+ 5	7
116,2	0,011326	0,011326	0	6
76,6	0,011356	0,011359	− 3	6
46,4	0,011415	0,011418	− 3	6
24,5	0,011546	0,011543	+ 3	5
44,1	0,011422	0,011424	− 2	6

Aus den beiden für die I. und II. Versuchsreihe erhaltenen Formeln folgt, dass sich bei der langen Capillare der I. Versuchsreihe wegen des grösseren Werthes von b eine stärkere Aenderung der inneren Reibung mit dem Druck bemerkbar macht, als bei der kurzen Capillaren der II. Versuchsreihe. Die Verschiedenheit der Werthe von a in den beiden Formeln ist wohl auf die Ungenauigkeiten bei der Bestimmung der Constanten der Apparate zurückzuführen. Die nachfolgende Tabelle liefert für die links stehenden Drucke die berechneten Zahlenwerthe η und η', die aus den zwei Formeln für die erste bez. für die zweite Versuchsreihe hervorgehen; $\Delta\eta$ bez. $\Delta\eta'$ repräsentiren die durch die Beobachtungsfehler bedingten Ungenauigkeiten der Reibungscoefficienten. $\eta - \eta'$ die sich ergebenden Differenzen.

P	η	$\Delta\eta$	η'	$\Delta\eta'$	$\eta - \eta'$
30	0,011518	8	0,011495	5	23
40	0,011450	7	0,011438	6	12
50	0,011408	6	0,011403	6	5
60	0,011381	5	0,011380	6	1
70	0,011361	5	0,011364	6	− 3
80	0,011346	5	0,011352	6	− 6
90	0,011335	4	0,011342	6	− 7
100	0,011326	4	0,011335	6	− 9
120	0,011312	4	0,011323	6	− 11
140	0,011302	4	0,011315	7	− 13
160	0,011295	4	0,011309	7	− 14
180	0,011289	5	0,011304	9	− 15

Die III. Versuchsreihe (vgl. auch Fig. 3) für Wasser bei 10° C. liefert für

$$a_1 = 0{,}013030$$
$$b = 0{,}0073178$$
$$z = 0{,}0000026$$

die Formel

$$\eta = \frac{0{,}0073178}{P} + 0{,}013027.$$

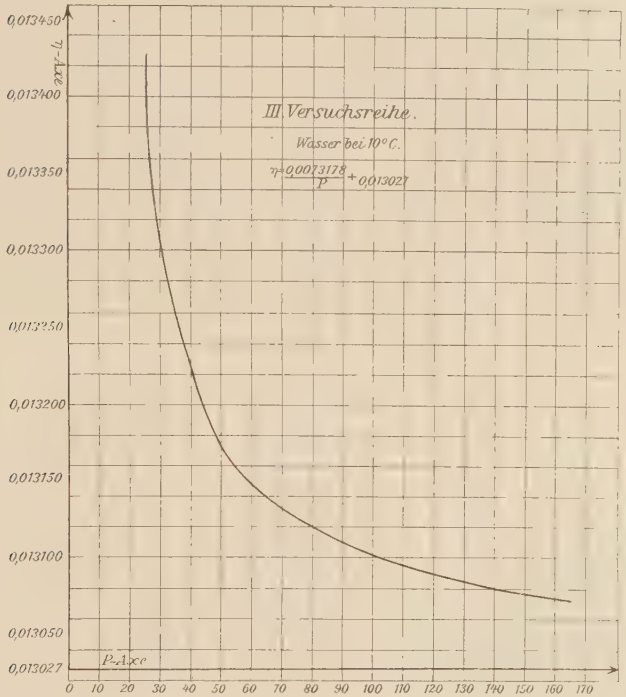

Fig. 3.

Die Uebereinstimmung zwischen den aus der Formel berechneten und den aus den Beobachtungen sich ergebenden Werthe zeigt die Tabelle:

P	η_1	η_2	$\eta_1 - \eta_2$	Δ
163,0	0,013072	0,013068	4	9
123,3	0,013087	0,013090	− 3	8
80,9	0,013118	0,013123	− 5	8
47,8	0,013180	0,013171	+ 9	9
24,6	0,013425	0,013431	− 6	12

Die Tabelle zeigt auch in diesem Falle die vortreffliche Uebereinstimmung der berechneten und beobachteten Werthe.

Um zu zeigen, ob und bis zu welchem Grade die Relation

$$\eta = \frac{b}{P} + a$$

auch für viel kleinere Coefficienten brauchbar ist, sei im Nachfolgenden dieselbe Methode angewendet auf Aethyläther bei 10° C. (IV. Versuchsreihe, vgl. auch Fig. 4). Es ergiebt sich für die berechneten Werthe

$$a = 0{,}002520 \text{ und } b = 0{,}0019344$$

die Formel

$$\eta = \frac{0{,}0019344}{P} + 0{,}002520,$$

deren Güte die folgenden Zahlen charakterisiren.

P	η_1	η_2	$\eta_1 - \eta_2$	Δ
102,6	0,002539	0,002528	11	2
93,0	0,002541	0,002535	6	2
76,9	0,002546	0,002545	1	2
53,6	0,002557	0,002561	− 4	2
46,2	0,002562	0,002571	− 9	2
30,2	0,002585	0,002589	− 4	2
19,6	0,002619	0,002618	1	3

Die Differenzen zwischen den berechneten und beobachteten Werthen sind von derselben Grössenordnung, indessen sind sie bedeutend grösser als die hier allerdings sehr kleinen durch falsche Ablesungen am Manometer bez. ungenaue Zeitbestimmung bedingten Fehler Δ. Allein der Umstand, dass die Abweichungen der Werthe von η_1 und η_2 nicht constant nach einer Richtung hin sind, sondern variiren, spricht doch dafür, dass auch für diese Versuchsreihe die aufgestellte Formel den an sie gestellten Anforderungen, die Aenderung von η mit P durch eine einfache Relation darzustellen, ganz gut genügt, indem die Differenzen immer noch innerhalb der Grenzen 0,04 Proc. bis 0,4 Proc., bei fünf Beobachtungen von den sieben sogar unter 0,16 Proc. bleiben, während die relativ geringen Beobachtungsfehler unter Voraussetzung ganz constanter Temperaturen immerhin einen Einfluss bis zu 0,12 Proc. auf den Coefficienten der inneren Reibung haben.

Etwa dasselbe Resultat liefert die Anwendung der abgeleiteten Formel auf die V. Versuchsreihe (vgl. auch Fig. 5). Für Chloroform bei 15° C. wird:

$$a = 0{,}005810$$
$$b = 0{,}002910$$

und

$$\eta = \frac{0{,}002910}{P} + 0{,}005810.$$

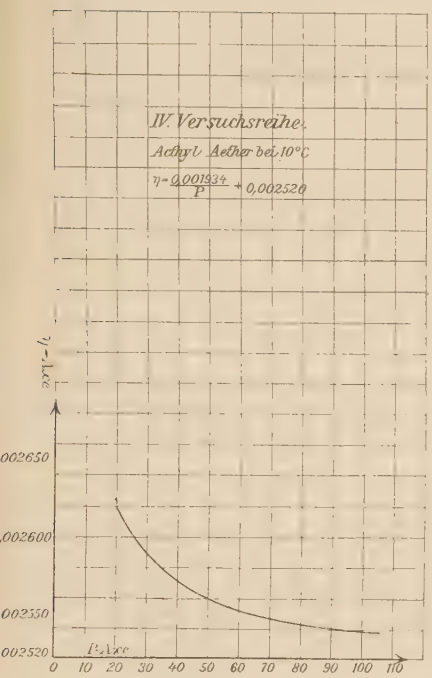

Fig. 4.

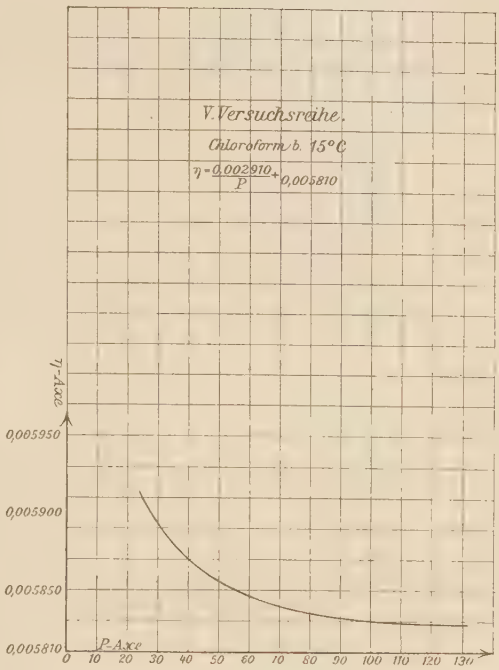

Fig. 5.

Inwieweit berechnete und beobachtete Werthe übereinstimmen, zeigt nachfolgende Tabelle.

P	η_1	η_2	$\eta_1 - \eta_2$	Δ
131,4	0,005832	0,005826	6	4
85,4	0,005844	0,005849	− 5	4
75,4	0,005849	0,005850	− 1	4
47,2	0,005871	0,005880	− 9	4
25,2	0,005926	0,005921	5	5

Die Differenzen $\eta_1 - \eta_2$ sind hier weniger gross als bei der IV. Versuchsreihe, während die Fehler in der Beobachtung wesentlich grösseren Einfluss haben, sodass die Uebereinstimmung in diesem Falle wieder besser ist. Man erkennt aus den angeführten Beobachtungen, dass die Formel

$$\eta = \frac{b}{P} + a$$

die Aenderung der inneren Reibung mit dem Druck mit um so grösserer Annäherung darstellt, je grösser die Viscosität der untersuchten Substanz ist. Andererseits lässt sich ohne Schwierigkeit der ohnehin sehr plausible Satz aus den erhaltenen Resultaten ablesen, dass diese Aenderung $d\eta/dP$ um so grösser ist, je grösser die Viscosität ist. Die Richtigkeit der letzten Behauptung ist sofort evident, wenn man die fünf gewonnenen Formeln zusammenstellt.

(I) $$\eta = \frac{0{,}0082606}{P} + 0{,}011243,$$

(II) $$\eta = \frac{0{,}0068634}{P} + 0{,}011266,$$

(III) $$\eta = \frac{0{,}0073178}{P} + 0{,}013027,$$

(IV) $$\eta = \frac{0{,}0019344}{P} + 0{,}002520,$$

(V) $$\eta = \frac{0{,}002910}{P} + 0{,}005810.$$

Die scheinbare Ausnahme bei (I) ist auf die wesentlich anderen Dimensionen des bei der I. Versuchsreihe benutzten Apparates mit der langen Capillare zurückzuführen.

V. Abschnitt.

§ 24. Nachdem so durch die vorhergehenden Beobachtungen eine nicht unwesentliche Abweichung von Poiseuille'schen Gesetz nachgewiesen ist, resultirt daraus die Aufgabe, eine möglichst plausible Erklärung dafür zu geben.

Die Richtigkeit der eigentlichen Voraussetzung des Poiseuille'schen Gesetzes, dass nämlich die innere Reibung pro-

portional ist der relativen Geschwindigkeit, mit welcher die einzelnen Flüssigkeitsschichten aneinander vorübergleiten, muss wohl ausser allen Zweifel gesetzt werden; denn es scheint natürlich, dass bei der n-fachen Geschwindigkeitsdifferenz zweier sich reibender Schichten die Zahl der pro Zeiteinheit aneinander vorbeieilenden Flüssigkeitsmolecüle die n-fache ist; daraus aber folgt, dass auch die zur Ueberwindung der Adhäsion der einzelnen Molecüle nothwendige Kraft oder die innere Reibung proportional ist mit der Geschwindigkeitsdifferenz.

Es war daher naheliegend, anzunehmen, dass wie bei der Reibung fester Körper so auch bei der Reibung von Flüssigkeiten Wärme frei wird. Bei hohen Drucken, wo die Geschwindigkeiten in den Capillaren grössere sind, werden die Geschwindigkeitsdifferenzen der einzelnen Schichten grösser werden, indem die Geschwindigkeit der äussersten Flüssigkeitsschicht als unendlich klein angenommen wird. So folgt aus dem Grösserwerden der Geschwindigkeitsdifferenzen mit wachsendem Druck eine Steigerung der Temperatur und daraus eine Abnahme der inneren Reibung.

Diese Hypothese gewinnt dadurch an Wahrscheinlichkeit, dass die durch die Reibung erwärmten Flüssigkeitstheilchen relativ sehr rasch fortgeführt werden, und so ein Wärmeaustausch mit der Umgebung erschwert wird, sodass das Temperaturgefälle von der Axe der Capillaren bis zur Wandung sehr gross ist. Dass von gewissen hohen Drucken an die Abnahme des aus den Beobachtungen sich ergebenden Coefficienten durch weitere Drucksteigerung unmerklich wird, kann durch die Annahme erklärt werden, dass die Wärmeentwickelung einem Grenzwerth der Temperaturerhöhung zustrebt; ist dieser erreicht, so wird alle weitere erzeugte Wärme nach aussen abgeleitet, während dies vor der Erreichung dieses Grenzwerthes nur theilweise der Fall war; auch die Erscheinung, dass der berechnete Coefficient bei niedrigeren Drucken mit wachsendem Druck wesentlich stärker abnimmt als bei hohen Drucken, lässt sich durch diese Annahme erklären.

Um die aus den Versuchen sich ergebenden Aenderungen der Durchschnittstemperaturen in den Capillaren, welche nach dieser Auffassung die Beobachtungsresultate erklären sollen, zu berechnen, verfuhr ich also:

Ist t die Versuchstemperatur, η_t der entsprechende Coefficient der inneren Reibung, η_{t+1} der bei der Temperatur $(t+1)^0$, so soll

$$\alpha = \eta_t - \eta_{t+1}$$

der Temperaturcoefficient der betreffenden Flüssigkeit bei t^0 sein.

Für die untersuchten Substanzen berechnete ich aus der von den Herren Thorpe und Rodger eingeführten Formel

$$\eta_t = \frac{a}{(b+t)^n},$$

wobei a, b und n constante Zahlen sind, diese Temperaturcoefficienten und bestimmte aus diesen die Temperaturerhöhung, indem ich die Aenderung der Viscosität innerhalb dieser Intervalle als proportional mit der Aenderung der Temperatur annahm, was erlaubt ist, da es sich ja nur darum handeln kann, einige Vorstellungen von der eventuellen Brauchbarkeit dieser Hypothese zu gewinnen.

Die nachfolgenden Tabellen geben unter P die Drucke, unter η die aus der Beobachtung entnommenen Coefficienten der inneren Reibung und unter δ die Temperaturdifferenzen an, welche aus der besprochenen Auffassung für die bei dem Drucke P erfolgte Beobachtung gegenüber dem bei dem geringsten Druck gemachten Versuch hervorgehen.

Ueber jeder Tabelle ist der entsprechende Temperaturcoefficient α und die Temperaturerhöhung Δ angegeben, welche dem schliesslich erreichten Grenzwerth a der inneren Reibung, wie er sich aus den Formeln im § 23 ergiebt, entspricht gegenüber der Temperatur, die bei dem geringsten angewendeten Druck in der Capillare durchschnittlich herrscht.

I. Versuchsreihe.

$\alpha = 294 \cdot 10^{-6}$; $\Delta = 1{,}18^0$ C.

P	η	δ
24,3	0,011590	0,00
48,4	0,011408	0,62
121,7	0,011312	0,95
160,0	0,011296	1,00

II. Versuchsreihe.

$\alpha = 294 \cdot 10^{-6}$; $\Delta = 0{,}94^0$ C.

P	η	δ
24,5	0,011543	0,00
44,1	0,011424	0,40
76,6	0,011359	0,62
116,2	0,011326	0,74
167,8	0,011302	0,82

III. Versuchsreihe.

$\alpha = 367 . 10^{-6}$; $\Delta = 1{,}10°$ C.

P	η	δ
24,6	0,013431	0,00
47,8	0,013171	0,71
80,9	0,013123	0,84
123,3	0,013090	0,93
163,0	0,013068	1,00

IV. Versuchsreihe.

$\alpha = 26 . 10^{-6}$; $\Delta = 3{,}79°$ C.

P	η	δ
19,6	0,002618	0,00
30,2	0,002589	0,11
46,2	0,002571	1,80
53,6	0,002561	2,19
76,9	0,002545	2,80
93,0	0,002535	3,19
102,6	0,002528	3,48

V. Versuchsreihe.

$\alpha = 61 . 10^{-6}$; $\Delta = 1{,}82°$ C.

P	η	δ
25,2	0,005921	0,00
47,2	0,005880	0,67
75,4	0,005850	1,18
85,4	0,005849	1,20
131,4	0,005826	1,56

Wie man aus diesen Zahlen δ für die Temperaturerhöhung in den Capillaren sieht, müsste bei dieser Auffassung das Temperaturgefälle ausserordentlich gross sein; doch abgesehen davon müsste auch die Aussenwandung der Capillaren eine gar nicht unwesentliche Temperaturerhöhung zeigen. Um nun dieser Sache näher zu kommen, ersetzte ich den die Capillare umgebenden Luftmantel durch einen Wassermantel, indem ich in die äussere Wandung des Querstückes mehrere Löcher einblasen liess, und wiederholte einige Versuche, ohne jedoch ein wesentlich anderes Resultat zu erhalten, sodass damit erwiesen sein dürfte, dass von einer derartigen Wärmeentwickelung keine Rede sein kann, zumal der Wassermantel, selbst wenn man annimmt, dass eine Bewegung in demselben nicht vorhanden ist, ca. 27 mal besser leitet als der Luftmantel.

Noch deutlicher spricht gegen eine derartige Erklärung der Umstand, dass die sich ergebende mittlere Temperaturerhöhung für Aethyläther doppelt so gross ist als für Chloroform, obwohl die specifische Wärme des Chloroforms $c_{CHCl_3} = 0{,}23$, die für Aethyläther $c_{C_4H_{10}O} = 0{,}56$ ist, und die Temperatur-

erhöhungen sich doch umgekehrt verhalten sollten wie die specifischen Wärmen.

§ 25. Sieht man von einer Erklärung der durch die vorliegende Arbeit nachgewiesenen Abweichungen vom Poiseuille'schen Gesetz durch die Annahme einer Wärmeentwickelung ab, so bleibt augenscheinlich nur noch die Möglichkeit, die Gleitung an der Röhrenwand zur Begründung heranzuziehen.

Bisher begnügte man sich, die äussere Reibung einer benetzenden und nach Warburg[1]) auch die einer nicht benetzenden Flüssigkeit als unendlich gross bez. die Geschwindigkeit als unendlich klein anzunehmen, wofern die Röhre nur eine Capillare war.

Der Grund hierfür liegt durchaus nicht in dem Wesen der Benetzung einer festen Wand durch eine Flüssigkeit, sondern lediglich darin, dass man bisher, infolge nicht genügend genau ausgeführter Messungen noch keinen Widerspruch mit dieser Annahme gefunden hat. Mit grosser Uebereinstimmung findet sich in den verschiedensten Abhandlungen über innere Reibung, dass durch Versuche erwiesen sei, dass für benetzende Flüssigkeiten die äussere Reibung $\lambda = \infty$ oder die Gleitung

$$\gamma = \frac{\eta}{\lambda} = 0 \quad \text{ist.}$$

Die Versuche von Poiseuille, Coulomb und Darcy, die hierbei gewöhnlich angeführt werden, sind, wie im I. Abschnitt gezeigt wurde, nicht im Stande, diese Annahme zu beweisen. Vielmehr legt ein eingehendes Studium der einschlägigen Literatur, insbesondere der Arbeit von Darcy, gerade die gegentheilige Ansicht nahe, dass Gleitung stattfindet.

Darcy hat ja allerdings in seiner Arbeit, indem er sich von rein praktischem Interesse leiten liess, nur weite Röhren behandelt, allein der Unterschied zwischen dem Strömen einer Flüssigkeit in einer weiten Röhre und dem Fliessen in einer Capillaren scheint mir durchaus nicht darin zu bestehen, dass in dem ersteren Falle die an der Röhrenwandung befindliche Flüssigkeitsschicht eine endliche Geschwindigkeit besitzt, während sie im zweiten Falle an der Wand festhaftet, also eine unendlich kleine Geschwindigkeit besitzt; vielmehr halte ich es

1) E. Warburg, Pogg. Ann. **140.** p. 337. 1870.

für sehr plausibel, dass auch im letzteren Falle eine, wenn auch wesentlich kleinere, aber doch immerhin endliche Geschwindigkeit vorhanden ist, die, wie die Maximalgeschwindigkeit in der Röhre und die mittlere Geschwindigkeit mit dem Druck zunimmt.

Hagenbach schreibt[1]) allerdings, dass die Geschwindigkeit an der Röhrenwandung Null sein müsse, weil die Flüssigkeiten in engen Röhren von verschiedenem Material auf gleiche Art ausfliesst, sobald nur die Röhren glatt sind, und die Flüssigkeiten benetzen. Dagegen ist zu bemerken, dass die Art des Fliessens keineswegs geändert werden dürfte, wenn auch eine endliche Geschwindigkeit am Rande vorhanden ist, selbst wenn diese, was ja im allgemeinen der Fall sein wird, von Substanz zu Substanz verschieden gross ist; die Bewegung wird nach wie vor in parallelen Schichten vor sich gehen, solange die Röhren nur enge genug sind. Der „Beweis", den Hagenbach für seine Behauptung andeutet, basirt auf der Voraussetzung, dass die Reibung zwischen einer Glas- oder Metallschicht und einer Wasserschicht eine Kraft von derselben Ordnung ist wie die Reibung zweier Wasserschichten; wenn man ganz davon absieht, dass die zahlreichen und äusserst zuverlässigen Versuche Darcy's sehr geeignet sind, das Gegentheil dieser Annahme zu beweisen, so müssten für eine Wahrscheinlichkeit einer solchen so ohne weiteres durchaus nicht plausiblen Behauptung doch immerhin einige Gründe angegeben werden, was aber leider nicht der Fall ist.

Was das Fliessen einer Flüssigkeit in Capillaren von dem in weiten Röhren wesentlich unterscheidet, soll im Folgenden kurz erörtert werden.

Wenn die Flüssigkeit in eine Röhre eintritt, so werden anfangs die Flüssigkeitstheilchen nahezu gleiche Geschwindigkeiten haben, nämlich diejenige mit der sie sich der Röhre näherten; in der Mitte der Röhre werden nun die Geschwindigkeiten wegen der Dimensionen des Querschnittes und des als stationär anzunehmenden Vorganges eine sehr bedeutende Zunahme, am Rande aber wegen der Benetzung derselben eine Abnahme erfahren. Das Resultat dieser rasch vor sich gehenden

1) E. Hagenbach, Pogg. Ann. **109.** p. 394. 1860.

Geschwindigkeitsänderungen wird bei den immerhin ziemlich verschiedenen Richtungen der in die Röhre eintretenden Flüssigkeitstheilchen nothwendig zu Wirbelbewegungen Veranlassung geben. Bei Capillaren wird dieser Uebergang in verhältnissmässig sehr kurzer Zeit vor sich gehen wegen der Nähe der Wandungen, während bei Röhren mit relativ grossen Querschnitten dem Fortbestehen von Wirbelbewegungen die grössere Entfernung der Wandungen weniger hinderlich ist.

Zahlreiche Versuche beweisen, dass bei Röhren von grösseren Querschnitten eine bedeutend geringere Flüssigkeitsmenge pro Zeiteinheit ausfliesst, als die Poiseuille'sche Formel liefert, was Hagenbach durch die Annahme eines Erschütterungswiderstandes berücksichtigt.

Die Annahme, dass die constatirte Aenderung des Coefficienten der inneren Reibung mit dem Druck vielleicht in dem Auftreten solcher Wirbelbewegungen ihre Ursache habe, ist hinfällig, indem sich daraus eine Zunahme der berechneten Coefficienten ergeben müsste, im Gegensatz zu den Resultaten der Beobachtung.

Es werden diese Wirbelbewegungen am Anfang der Capillaren ja zweifellos auftreten, allein gegenüber der Gleitung, die mit wachsenden Drucken wohl rascher zunehmen wird als diese auf ein ausserordentlich kleines Gebiet beschränkten Wirbelbewegungen, können sie wohl mit Recht vernachlässigt werden.

Dass die berechneten Coefficienten sich einem Grenzwerthe nähern, lässt sich verstehen, sobald man bedenkt, dass von einer gewissen Geschwindigkeit der Randschicht an die Adhäsion der Flüssigkeitstheilchen an der Wand einer Steigerung der Randgeschwindigkeit durch die bekanntlich sehr bedeutenden Capillarkräfte entgegenwirkt.

§ 26. Um eine Vorstellung von der Aenderung der Gleitung mit dem Druck zu erhalten, geht man am besten von der von Helmholtz) für die pro Zeiteinheit den Querschnitt der Capillaren passirende Flüssigkeitsmenge Q aufgestellten Formel

$$(1) \qquad Q = \frac{\pi . P}{8 \eta . l} \left\{ R^4 + \frac{4 \eta}{\lambda} R^3 \right\}$$

aus, in welcher η/λ die Gleitung ist.

In dem IV. Abschnitt wurde gezeigt, dass der nach der Formel

$$\eta = \frac{\pi . P . t}{8\, l . v} \cdot R^4$$

(unter der vereinfachenden Voraussetzung eines kreisförmigen Querschnittes) berechnete Coefficient sich darstellen lässt durch

$$\eta = \frac{b}{P} + a.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung (1) ein und führt statt der secundlich die Capillare passirenden Flüssigkeitsmenge das Gesammtvolumen v und die Versuchsdauer t ein, so erhält man:

(2) $$\eta_i = \frac{b}{P} + a + \pi \frac{4 . P . t . \eta_i . R^3}{8\, l . \lambda . v},$$

wobei mit η_i der vom Druck als unabhängig angenommene Coefficient der inneren Reibung bezeichnet ist.

In dem zweiten Gliede kann man, um t zu eliminiren,

$$\pi \frac{P . t . R^3}{8\, l . v} = \frac{1}{R}\left(\frac{b}{P} + a\right)$$

substituiren und erhält dadurch:

(3) $$\eta_i = \left(\frac{b}{P} + a\right)\left(1 + \frac{4 . \eta_i}{\lambda . R}\right).$$

Daraus ergiebt sich:

$$\frac{1}{\lambda} = \left\{\frac{\eta_i}{\frac{b}{P} + a} - 1\right\} \cdot \frac{R}{4 . \eta_i}$$

oder

(3a) $$\lambda = \frac{\frac{b}{P} + a}{\eta_i - \left(\frac{b}{P} + a\right)} \cdot \frac{4 . \eta_i}{R}.$$

Setzt man

$$\alpha = 4\, b . \eta_i, \qquad \beta = 4\, a . \eta_i,$$
$$\gamma = -\, b, \qquad \eta_i - a = \delta,$$

so stellt sich die Abhängigkeit des λ vom Druck dar durch die Gleichung:

(4) $$\lambda = \frac{\alpha + \beta . P}{\gamma + \delta . P} \cdot \frac{1}{R}.$$

Da $\delta = \eta_i - a$ immerhin eine kleine Grösse ist, sodass $\delta^2 . P^2$ vernachlässigt werden kann, so lässt sich auch schreiben:

$$\lambda = (\alpha + \beta . P)\left(1 - \frac{\delta}{\gamma} . P\right) \frac{1}{R . \gamma}$$

oder

$$\lambda = \frac{1}{R}\{\alpha' + \beta' P + \gamma' P^2\}. \tag{5}$$

Wesentlich einfacher für eine numerische Berechnung gestaltet sich die Gleichung (3a), wenn man in dieselbe wieder die Substitution

$$\eta = \frac{b}{P} + a$$

macht; man erhält die einfache Relation:

$$\lambda = \frac{4\,\eta_i . \eta}{R(\eta_i - \eta)}. \tag{6}$$

Nimmt man an, dass der Grenzwerth, dem sich der aus den Beobachtungen sich ergebende Coefficient nähert, gerade die innere Reibung η_i darstellt, so ergiebt sich für λ eine negative Zahl, indem $\eta_i < \eta$ ist.

Das negative Vorzeichen der äusseren Reibung und damit der Gleitung weist darauf hin, dass die Flüssigkeit am Rande der Capillare eine entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeit hat, was sich durch die Unebenheiten der Röhrenwandung und der dadurch bedingten Wirbelbewegungen erklären lässt und in der Mittheilung von Sir William Thomson[1]) „On Stationary Waves in Flowing Water“ ein Analogon haben dürfte, wo gezeigt wird, dass Unebenheiten auf dem Grunde eines Flussbettes auf der Oberfläche des Wassers flussaufwärts gehende Wellen zur Folge haben, was in dem schottischen System des „fly-boat“ praktische Verwerthung findet.

Da die benutzten Capillaren nicht kreisförmigen, sondern elliptischen Querschnitt hatten, benutzte ich für R den aus der Gleichung

$$R^4 = \frac{2\,a^3\,b^3}{a^2 + b^2}$$

sich ergebenden Mittelwerth, um die Grösse der äusseren Reibung zahlenmässig darzustellen.

1) W. Thomson, Phil. Mag. (5) **22.** p. 353—357, 445—452 und 517—523. 1886.

Aus jeder der fünf Versuchsreihen sind in den nachfolgenden Tabellen für die drei Drucke: 25 cm, 100 cm und 180 cm die Werthe von λ berechnet.

I. Versuchsreihe.
Wasser bei 15° C.; $R = 0{,}04158$ cm.

$P = 25$ cm	$\lambda = -36{,}12$
$P = 100$	$\lambda = -147{,}60$
$P = 180$	$\lambda = -265{,}44$

II. Versuchsreihe.
Wasser bei 15° C.; $R = 0{,}05256$ cm.

$P = 25$ cm	$\lambda = -33{,}32$
$P = 100$	$\lambda = -140{,}84$
$P = 180$	$\lambda = -202{,}00$

III. Versuchsreihe
Wasser bei 10° C.; $R = 0{,}05256$ cm.

$P = 25$ cm	$\lambda = -45{,}08$
$P = 100$	$\lambda = -177{,}28$
$P = 180$	$\lambda = -316{,}24$

IV. Versuchsreihe.
Aethyläther b. 10° C.; $R = 0{,}04248$ cm.

$P = 25$ cm	$\lambda = -8{,}00$
$P = 100$	$\lambda = -32{,}40$
$P = 180$	$\lambda = -54{,}60$

V. Versuchsreihe.
Chloroform bei 15° C.; $R = 0{,}04248$ cm.

$P = 25$ cm	$\lambda = -27{,}96$
$P = 100$	$\lambda = -110{,}16$
$P = 180$	$\lambda = -199{,}20$

Die Tabellen lassen auf den ersten Blick eine Proportionalität der λ mit den Drucken erkennen und führen zu dem interessanten Resultat, dass die äussere Reibung mit steigender Temperatur abnimmt (Versuchsreihen I, II und III), dass die äussere Reibung von Chloroform bei 15° nur um weniges kleiner ist als die des Wassers bei 15° C., während für Aethyläther bei 10° die äussere Reibung nur den vierten Theil von der des Wassers bei 15° C. oder den sechsten Theil von der des Wassers bei derselben Temperatur (bei 10° C.) beträgt.

Die umgekehrte Proportionalität des λ mit dem Radius R der Capillaren steht in vollster Uebereinstimmung mit den Beobachtungen von Darcy und den ebenfalls für weite Röhren und Kanäle angestellten Untersuchungen der allerneuesten Zeit von Bazin[1]) und Boussinesq.[2])

1) Bazin, Compt. rend. 122b. p. 1250. 1896.
2) Boussinesq, Compt. rend. 122b. p. 1447. 1896.

Jedenfalls ist die Erklärung der in dieser Arbeit untersuchten Abweichungen vom Poiseuille'schen Gesetz durch die Annahme einer Gleitung der äussersten Flüssigkeitsschicht an der Röhrenwandung durchaus ungezwungen und plausibel.

Wenn man bisher $\lambda = \infty$ anzunehmen pflegte, während sich aus diesen Berechnungen relativ nicht sehr grosse Zahlen ergeben, so liess man dabei ganz ausser Acht, dass der Werth des Quotienten

$$4 \frac{\pi . P . t}{v . 8 l \lambda} . R^3 . \eta$$

(vgl. Formel (2)) schon wegen des kleinen Werthes des Zählers keine grosse Zahl sein kann, sodass schon bei einigermaassen grossen Werthen für λ der Werth des Quotienten die Grösse der Beobachtungsfehler nicht übersteigt.

Resultate.

1. Es wurde bisher eine Abweichung vom Poiseuille'schen Gesetz durch den directen Einfluss von Druckänderungen nicht nachgewiesen.

2. Die in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Versuche erweisen die Existenz einer Abweichung der Beobachtungsresultate in dem Sinne, dass für wachsende Drucke die Poiseuille'sche Formel mit Berücksichtigung des Hagenbach'schen Gliedes grössere Werthe liefert als die Beobachtung. (Die erreichte Genauigkeit bei den einzelnen Beobachtungen ist insbesondere bedingt durch Anwendung der Formel

$$p = \frac{P_2 t_2 - P_1 t_1}{t_1 + t_2}$$

für die von der Flüssigkeit im Apparat herrührende Druckcorrectur.)

3. Die Aenderung des berechneten Coefficienten, wie er sich aus den Versuchsdaten ergiebt, mit dem angewendeten Druck lässt sich mit sehr guter Annäherung darstellen durch die Gleichung:

$$\eta = \frac{b}{P} + a .$$

4. Eine Erklärung dieser beobachteten Erscheinung durch die Annahme einer Wärmeentwickelung ist hinfällig, während

eine Gleitung der äussersten Flüssigkeitsschicht an der Röhrenwandung die Beobachtungsresultate vollständig zu erklären im Stande ist.

5. Für die äussere Reibung ergiebt sich die einfache Formel

$$\lambda = \frac{4 \cdot \eta_i \cdot \eta}{R(\eta_i - \eta)} .$$

Daraus folgt, unter der Annahme, dass der Grenzwerth a, dem der aus den Beobachtungen sich ergebende Coefficient mit wachsendem Drucke sich nähert, gerade die innere Reibung η_i darstellt, der Satz:

„Die äussere Reibung ist proportional dem Druck, unter dem die Flüssigkeit die Capillare passirt.“

Schliesslich gereicht es mir zur angenehmen Pflicht, meinen hochverehrten Lehrern, den Herren Prof. Dr. E. v. Lommel und Dr. L. Graetz an dieser Stelle meinen ergebensten Dank auszusprechen für die Ueberlassung der zur Arbeit nöthigen Hülfsmittel, insbesondere aber für das meinen Untersuchungen entgegengebrachte Interesse und die mannichfachen Anregungen, die mir zu Theil wurden.

München, Physikal. Inst. der Kgl. Univ., Januar 1899.